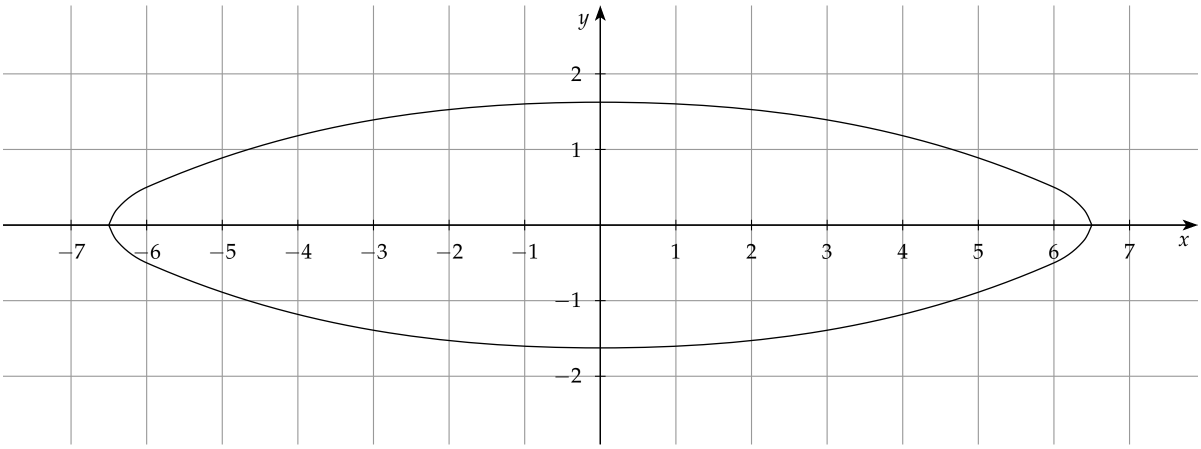
1. ▶ **Umriss des Luftschiffs skizzieren** (5BE)

Der Umriss beschreibt eine flächige Darstellung des Luftschiffs, das von der Seite betrachtet wird, wodurch eine Ellipse als Schaubild entsteht.

Um das Luftschiff zu skizzieren, musst zunächst einige Punkte ausmachen, die den Umriss des Luftschiffs beschreiben. Verwende dazu den höchsten Punkt sowie die Spitze und das Heck des Schiffs. Das Koordinatensystem musst du dann noch so skalieren, dass du die Längen des Luftschiffs auch realitätsgetreu auf die Skizze übertragen kannst.

- flächige Darstellung, ellipsenförmig
- Punkte, die den Umriss definieren, festlegen
- Koordinatensystem skalieren, um Skizze realitätsgetreu abzubilden

Du kannst beispielsweise dein Koordinatensystem so skalieren, dass 1 cm des Schaubildes 20 m in Realität entspricht. Damit ergeben sich $\frac{260}{20}$ cm Länge und eine Höhe von $\frac{65}{20}$ cm.
Setzt du den Mittelpunkt des Luftschiffs auf den Koordinatenursprung, so erhältst du ein Schaubild, das wie folgt aussieht.



2.1. ▶ **Symmetrische Funktion zur Darstellung des Luftschiffs** (7BE)

Ein Drehkörper entsteht dadurch, dass der Graph einer Funktion um die x-Achse gedreht wird somit einen Rotationskörper bildet.
Der Graph einer ganzrationalen Funktion kann nur dann achsensymmetrisch zur y-Achse sein, wenn sie einen geraden Grad besitzt. Als Folge können nur die Graphen solcher Funktionen einen Drehkörper bilden, der den Vorgaben entspricht.
Die Wahl des Grades der Funktion hängt von den dir gegebenen Bedingungen ab, da eine Funktion immer eine Bedingung mehr braucht, damit sie bestimmt werden, als sie Grade besitzt. Folglich braucht beispielsweise eine unbestimmte Funktion 4. Grades 5 Bedingungen um eindeutig definiert zu werden.

Aus dem Schaubild der vorherigen Aufgabe kannst du erkennen, dass es einen Hochpunkt und 2 Nullstellen als Bedingung gibt. Beachte hierbei nur den positiven y-Bereich, da dieser nun auch durch die Funktion dargestellt werden soll. Somit hast du 3 Bedingungen, aus denen du nun eine Funktion 2. Grades bilden kannst.

Da du 2 Nullstellen gegeben hast, kannst du die Linearfaktorzerlegung verwenden, deren allgemeine Form für eine Parabel p lautet $p(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot a$, wobei x_1 und x_2 die Nullstellen bei $x_1 = 6,5$ und $x_2 = -6,5$ sind und a durch den Hochpunkt bei $H(0 \mid 1,625)$ definiert wird.

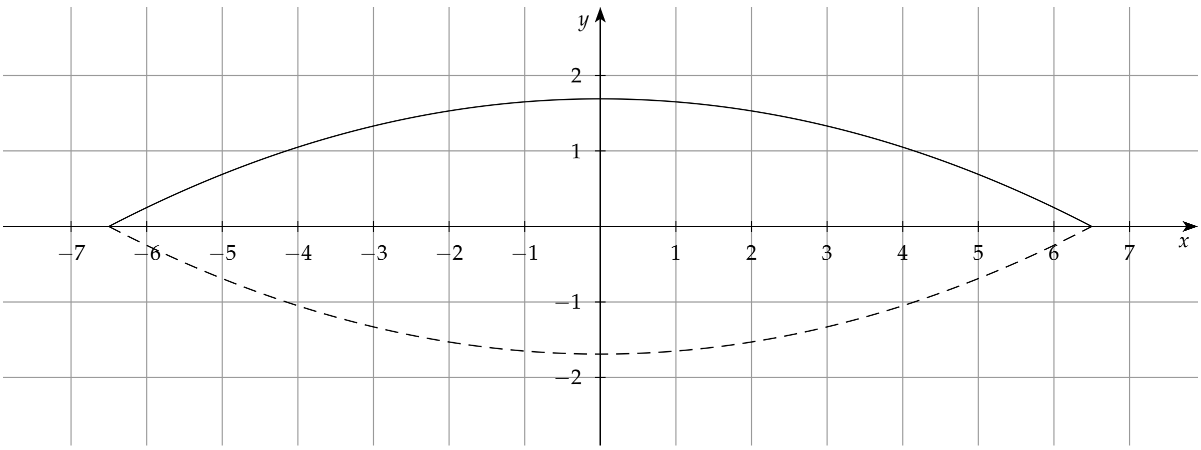
- Grad der Funktion immer 1 niedriger als Anzahl der Bedingungen
- 3 Bedingungen $\Longrightarrow$ Funktion 2. Grades
- 2 Nullstellen gegeben $\Longrightarrow$ Linearfaktorzerlegung nach $p(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot a$

Daraus ergibt sich die Gleichung $p(x) = (x - 6,5)(x + 6,5) \cdot a$. Setze nun die Koordinaten des Punktes H in p ein und löse nach a auf.

$$
\begin{aligned}
p(0) &= 1,625 \\
1,625 &= (0 - 6,5)(0 + 6,5) \cdot a \\
1,625 &= (-6,5) \cdot 6,5 \cdot a \\
1,625 &= -42,25 \cdot a && \mid : (-42,25) \\
-\frac{1,625}{42,25} &= a \\
a &\approx -0,038
\end{aligned}
$$

Somit lautet die Funktionsgleichung der Randfunktion p vollständig $p(x) = (x - 6,5)(x + 6,5) \cdot (-0,038)$.

▶ Querschnitt des Drehkörpers von p



▶ Probleme der Modellierung

Ein Luftschiff besitzt einen abgerundeten Bug und Heck und hat seinen höchsten Punkt nicht in der Mitte des Schiffs.

Der dargestellte Drehkörper allerdings besitzt harte Sprünge an den Nullstellen x_1 und x_2. Auch die symmetrische Darstellung entspricht nicht einer realistischen Darstellung.

- realistische Darstellung eines Luftschiffs
- unrealistische Gegebenheiten des Schaubildes

2.2 ▶ ganzrationale Funktion 3. Grades bestimmen (11BE)

Für eine ganzrationale Funktion 3. Grades benötigst du 4 Bedingungen, damit du alle Parameter der allgemeinen Form einer Funktion 3. Grades f mit $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ eindeutig bestimmen kannst.

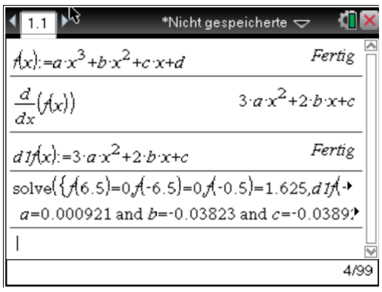
Gegeben sind dir 3 Punkte, 2 Nullstellen und der Hochpunkt $H(-0{,}5 \mid 1{,}625)$, der in den negativen y-Bereich verschoben wird.

An einer Extremstelle gilt immer $f'(x) = 0$, also dass die Funktion hier eine waagerechte Tangente besitzt. Somit ergeben sich 4 Bedingungen aus den 3 gegebenen Punkten.

- 4 Bedingungen, um alle Parameter zu bestimmen
- allgemeine Form $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
- an Extremstellen: $f'(x) = 0$

Leite zunächst die allgemeine Funktion f mittels deines Taschenrechners ab.

Setze nun alle Bedingungen in die allgemeinen Gleichungen ein, und löse nach den Parametern auf.
Dies kannst du in einem `solve`-Befehl zusammenfassen, der dann wie folgt aussieht.
`solve({f(6,5)=0,f'(-0,5)=0,...},{a,b,c,d})`.



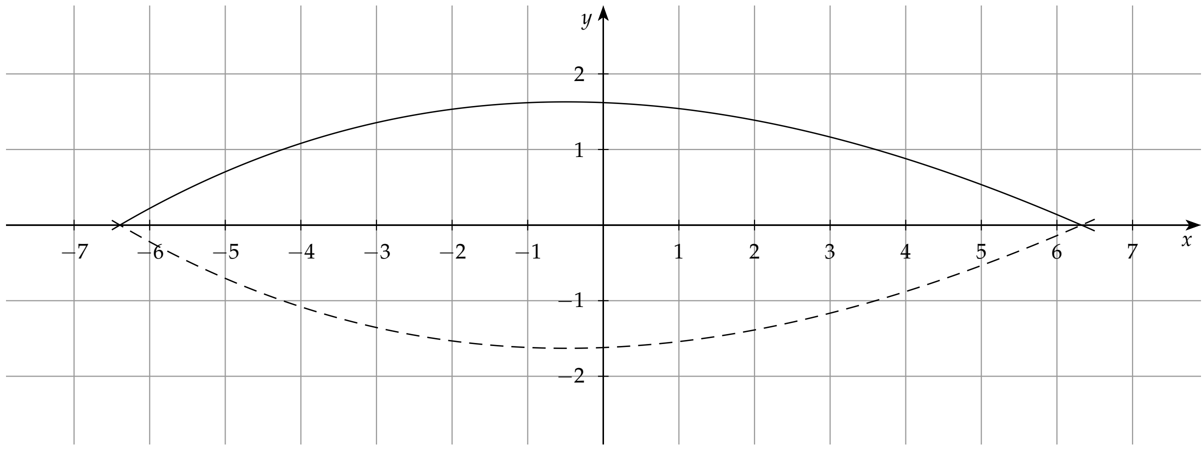
Somit ergeben sich die folgenden Werte für die Parameter:

$a \approx 9{,}212 \cdot 10^{-4}$
$b \approx -0{,}038$
$c \approx -0{,}039$
$d \approx 1{,}615$

Somit ergibt sich die Funktionsgleichung von f mit

$$f(x) = 9{,}212 \cdot 10^{-4} \cdot x^3 - 0{,}038 \cdot x^2 - 0{,}039 \cdot x + 1{,}615.$$

► Querschnitt der Drehkörpers von f



► Probleme der Modellierung

Ein Luftschiff besitzt abgerundeten Bug und Heck und hat seinen höchsten Punkt nicht in der Mitte des Schiffs. Außerdem soll es weiterhin die Länge von 260 m besitzen und 65 m hoch sein.

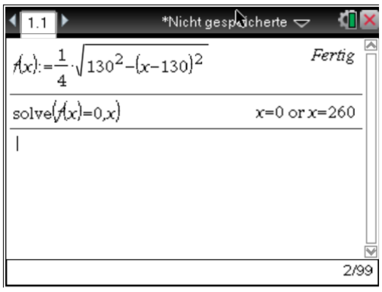
Wie in der vorherigen Aufgabe ist es aber der Fall, dass Front und Heck spitz sind. Außerdem kann es aufgrund der Näherung, die durch die Parameter, die bei ihrer Berechnung gerundet wurden, zu Ungenauigkeiten bzgl. der Länge und Form des Schiffs kommen.
Abschließend besäße durch diese Form das Luftschiff eine breite Front, die zu mehr Luftwiderstand führen würde, was ein weiteres Problem dieser Modellierung wäre.

3. **► Volumen des Luftschiffs berechnen** (6BE)

Auch die Funktion L wird als Randfunktion angeführt, wodurch auch sie das Volumen des Luftschiffs über einen Rotationskörper beschreibt. Die Formel zur Berechnung eines Rotationskörper lautet $\pi \cdot \int\limits_a^b L(x)^2 \mathrm{d}x$, wobei die Grenzen a und b durch die Nullstellen beschrieben werden, da der Rotationskörper um die x-Achse rotiert. Folglich musst du diese zunächst berechnen, da die Aufgabe nicht unbedingt von den in den vorherigen Aufgabenteilen ausgeht.

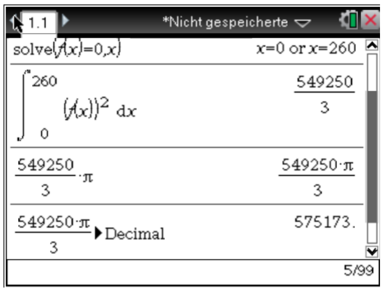
- Rotationskörper von L beschreibt Luftschiffvolumen
- Formel zur Berechnung des Rotationskörpers: $\pi \cdot \int\limits_a^b L(x)^2 \mathrm{d}x$
- Nullstellen als Grenzen des Integrals berechnen

Berechne zunächst mit Hilfe deines CAS-Rechners die Nullstellen von L.



Folglich ergeben sich die Grenzen mit $x_0 = 0$ und $x_1 = 260$.

Berechne nun mittels des `Integral`-Befehls auf deinem Taschenrechner das Integral zwischen den eben bestimmten Nullstellen.



Somit erhältst du als Volumen $V_1 = 575.173,26\,\text{m}^3$.

▶ Prozentuale Abweichung bestimmen

Die prozentuale Abweichung wird berechnet durch die Formel $\Delta V_{\%} = \dfrac{V_1 - V_0}{V_0} \cdot 100\%$, wobei V_0 das gegebene Volumen ist und V_1 das berechnete.

- Differenz von V_1 und V_0 bilden
- In Formel $\Delta V_{\%} = \dfrac{V_1 - V_0}{V_0} \cdot 100\%$ einsetzen

$V_1 - V_0 = 575.173 - 550.000 = 25.173$

Berechne nun mit Hilfe des Rechners den prozentualen Unterschied mittels der dir oben gegebenen Formel.

$$\Delta V_{\%} = \frac{25.173}{550.000} \cdot 100\% \approx 0,0458 \cdot 100\% = 4,58\%$$

Somit ergibt sich eine Abweichung von $4,58\%$.

4.1 ▶ Behauptung beurteilen (7BE)

Die Behauptung zu beurteilen bedeutet, sich auf die gegebenen Bedingungen zu beziehen und diese zu beweisen oder zu widerlegen. Die Bedingungen sind dir gegeben durch die Abstände der Nullstellen, also dem Abstand der Wände an Heck und Bug zueinander, sowie dem Abstand am höchsten Punkt, also dem Extremum.

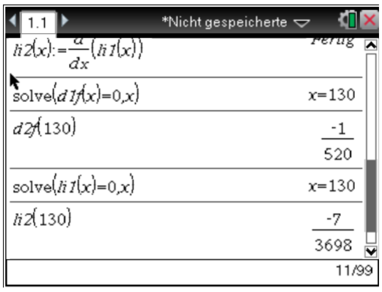
Außerdem soll es sich um eine Innenwand handeln, sodass sich die beiden Graphen der Funktionen nie schneiden dürfen.

- Hochpunkte und Nullstellen bestimmen
- Abstände an Hochpunkt und Nullstellen prüfen
- Graphen auf Schnittpunkte innerhalb des untersuchten Bereichs untersuchen

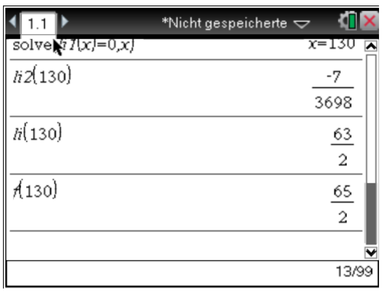
1. Schritt: Hochpunkt von L_i und L bestimmen

Zur Bestimmung des Hochpunktes trägst du die Funktionen L_i und L in den CAS-Rechner ein, leitest sie ab und setzt die Ableitungen mittels `solve` gleich 0.

Das Ergebnis musst du noch in die 2. Ableitung einsetzen, um zu beweisen, dass es sich um einen Hochpunkt handelt. Dein Rechner sollte das nebenstehende Bild zeigen.



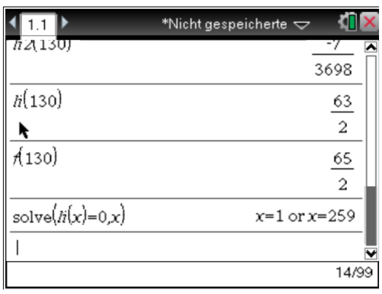
Setze nun noch die eben bestimmten Stellen in die Funktionsgleichungen ein, um den zugehörigen Funktionswert zu erhalten.



Daraus ergeben sich die Hochpunkte $H_L(130 \mid 32,5)$ und $H_{L_i}(130 \mid 31,5)$.

2. Schritt: Nullstellen bestimmen

Setze die Funktion $Li(x) = 0$ und löse diese Gleichung mittels eines `solve`-Befehls auf.



Daraus ergeben sich Nullstellen bei $x_0 = 1$ und $x_1 = 259$.

3. Schritt: Abstände prüfen

Für die Nullstellen beider Funktionen gilt $f(x_L) = f(x_{Li})$. Somit musst du nur die x-Koordinaten der Nullstellen, die am nächsten zueinander liegen, vergleichen. Daraus resultiert:

1-0=1

260-259=1

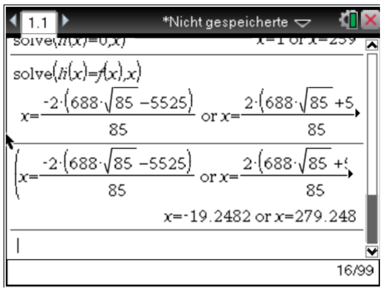
Somit haben die Nullstellen einen Abstand von 1 zueinander.

Die Hochpunkte haben die selben x-Koordinaten mit $x_H = 130$. Somit musst du nur die y-Koordinaten vergleichen, die sich mit $32,5 - 31,5 = 1$ auch um genau 1 unterscheiden.

4. Schritt: Graphen auf Schnittpunkte prüfen

Setze nun noch die Funktionsterme gleich, um Schnittstellen der Funktionen im Intervall auszuschließen, da diese bei einer Innenwand und einer Außenwand nicht vorkommen dürfen.

Die Ergebnisse liegen nicht innerhalb des Intervalls. Folglich spricht auch hier nichts gegen das zweiwandige Modell des Luftschiff



Folglich beschreibt die Funktion L_i die Innenwand des doppelwandigen Luftschiffs ausreichend gut, da keine der Bedingungen verletzt wird.

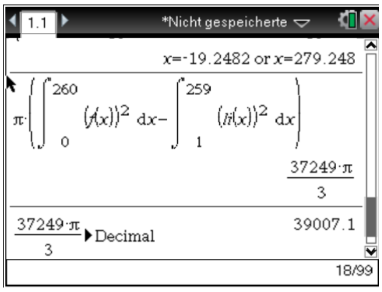
4.2 ▶ **Volumen zwischen den beiden Wänden berechnen.** (4BE)

Der Volumenunterschied zweier Rotationskörper ergibt sich aus der Gleichung

$$\pi \cdot \left(\int_a^b L(x)^2 \mathrm{d}x - \int_{x_0}^{x_1} L_i(x)^2 \mathrm{d}x \right).$$

a und b beschreiben die Nullstellen der Funktion L und x_0 und x_1 die von L_i, welche du bereits im vorherigen Aufgabenteil berechnet hast.

Die Differenz kannst du mit Hilfe deines CAS-Rechners berechnen.



Somit ergibt sich ein Volumen zwischen der inneren und der äußeren Wand des Luftschiffs von 39.007,1 m^3.