a) ▶ **Nachweisen der Symmetrie** (10P)

Wenn der Graph einer Funktion symmetrisch ist, dann ist er entweder **achsensymmetrisch** oder **punktsymmetrisch**. Um einen Graphen auf Symmetrie zu überprüfen, setzt du für $x = -x$ in die Funktion $f(x)$ ein. Ist ein Graph achsensymmetrisch zur y-Achse so gilt $f(-x) = f(x)$. Ist ein Graph punktsymmetrisch zum Ursprung so gilt $f(-x) = -f(-x)$.

Setze zum Untersuchen der Symmetrie des Graphen von f $-x$ in den zugehörigen Funktionsterm ein:

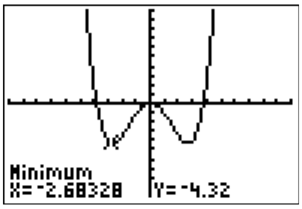
$$\begin{aligned} f(-x) &= \tfrac{1}{20} \cdot (-x)^4 - \tfrac{6}{5} \cdot (-x)^2 \\ &= \tfrac{1}{20} \cdot x^4 - \tfrac{6}{5} \cdot x^2 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

$f(-x) = f(x)$ $\Rightarrow$ Der Graph ist symmetrisch zur y-Achse.

▶ **Bestimmen der Extrempunkte**

Du kannst du Extrempunkte mit Hilfe des Grafik-Menüs deines GTR bestimmen.

Trage die Funktion ins `Y=`-Menü deines Taschenrechners ein. Anschließend kannst du sie dir im `Graph`-Menü zeichnen lassen. Jetzt kannst du über folgende Eingabefolge die Minima bestimmen: `2nd →Calc → 3: minimum`. Gib die rechte und linke Grenze des Suchbereichs und einen Näherungswert an und du erhältst die Minima. Die Maxima erhältst du über `2nd →Calc → 4: maximum`.



Der Graph hat einen Hochpunkt, $P(0|0)$ und zwei Tiefpunkte, $Q(\sqrt{12}| - 7,2)$ sowie $R(-\sqrt{12}| - 7,2)$.

▶ **Begründen der Wendepunkte**

Überlege dir, wann Graphen von **ganzrationalen Funktionen** Wendepunkte haben und was die **Extrempunkte** damit zu tun haben. Wendepunkte sind die Punkte, an denen sich das Krümmungsverhalten einer Funktion ändert.

Bei Graphen von ganzrationalen Funktionen liegt **zwischen zwei Extrempunkten** immer ein Wendepunkt. Anders könnten die Extrempunkte nicht miteinander verbunden werden.

Ein Wendepunkt muss zwischen dem Tiefpunkt $R(-\sqrt{12}| - 7,2)$ und dem Hochpunkt $Q(\sqrt{12}| - 7,2)$ liegen. Der zweite Wendepunkt muss zwischen dem Hochpunkt $Q(\sqrt{12}| - 7,2)$ und dem Tiefpunkt $Q(\sqrt{12}| - 7,2)$ liegen.

Der Graph der Funktion f hat drei Extrempunkte. Daher muss er zwei Wendepunkte haben.

▶ **Begründen der Wendestellen**

Du berechnest die Wendestellen einer Funktion, indem du die zweite Ableitung der Funktion gleich Null setzt (**notwendige Bedingung**). Überlege dir, wie sich das Ableiten einer Funktion auf deren Funktionsterm auswirkt.

Jedes Mal, wenn du eine ganzrationale Funktion ableitest, wird der **Grad** der Funktion um Eins verringert. Wenn du eine ganzrationale Funktion zweimal ableitest, wird der Grad der Funktion also um Zwei verringert. Die zweite Ableitung einer ganzrationalen Funktion vierten Grades hat daher den Grad Zwei.

Um nun die Wendestellen einer Funktion zu berechnen, musst du die zweite Ableitung der Funktion gleich Null setzen (notwendige Bedingung). Wenn du eine ganzrationale Funktion zweiten Grades gleich Null setzt, kann die entstehende Gleichung maximal zwei Lösungen haben. Aus diesem Grund kann eine ganzrationale Funktion vierten Grades maximal zwei Wendestellen besitzen.

b) ▶ **Berechnung des Flächeninhalts** (9P)

Du sollst hier den Flächeninhalt zwischen einem Graphen und einer Gerade berechnen. Dieser Flächeninhalt ist also der Flächeninhalt **zwischen zwei Graphen**. Die Gerade bezeichnen wir mit g. Notiere dir zunächst die Geradengleichungen der Geraden g, die gemeinsam mit dem Graphen von f die Teilflächen begrenzt. Danach solltest du dir klar machen, aus welchen Teilflächen die betrachtete Fläche besteht. Anschließend kannst du den Flächeninhalt mit Hilfe eines Integrals berechnen.

1. Schritt: Bestimmen der Geradengleichung

Um einen Flächeninhalt zwischen zwei Graphen zu berechnen, benötigst du deren Funktionsgleichungen. In unserem Fall sollst du den Flächeninhalt zwischen dem Graphen der Funktion f und der Geraden g berechnen. Die Funktionsgleichung der Funktion f kennst du bereits. Die **Funktionsgleichung der Geraden** musst du noch ermitteln: Die **allgemeine Geradengleichung** lautet dabei: $g(x) = m \cdot x + c$

Die Gerade g ist parallel zur x-Achse. Ihre Steigung ist daher Null $\Rightarrow m = 0$.

Der y-Achsenabschnitt ist der Wert, bei dem die g die y-Achse schneidet. In unserem Fall ist das der Wert $y = -4 \Rightarrow c = -4$.

Setze jetzt die Werte in die allgemeine Geradengleichung ein:

$$g(x) = m \cdot x + c \qquad | \; m = 0;\; c = -4$$
$$g(x) = 0 \cdot x + (-4)$$
$$g(x) = -4$$

Die Geradengleichung der Geraden g lautet: $g(x) = -4$

2. Schritt: Berechnen des Flächeninhalts

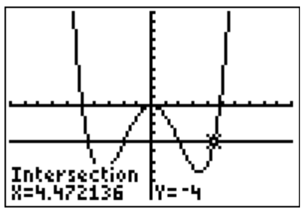
Schau dir die Anlage 1 nochmals an. Du erkennst, dass sowohl der Graph der Funktion f als auch die Gerade g **achsensymmetrisch** zur y-Achse sind. Daher genügt es, den Flächeninhalt der Teilfläche links oder rechts von der y-Achse zu berechnen. Dafür benötigst du jene Stellen, welche jeweils die Teilflächen **begrenzen**.

Wie du in der Abbildung in der Anlage erkennen kannst, werden die Flächen jeweils durch die **Schnittstellen** der Funktion f und der Geraden g begrenzt. Berechne daher zunächst die dazugehörigen Schnittpunkte mit Hilfe deines GTR:

Trage die Funktionsterme von f und g in das Y=-Menü deines GTR ein.

Wechsle danach ins GRAPH-Menü und bestimme die Schnittpunkte über folgende Eingabe: `2nd → CALC→ 5: intersect`

Dafür musst du zuerst die beiden Graphen bestätigen und anschließend einen Schätzwert angeben.



Du erhältst folgende Schnittpunkte: $S_1(-4,47|-4)$, $W_1(-2|-4)$, $W_2(2|-4)$ und $S_2(4,47|-4)$

In der Aufgabenstellung sind die beiden Wendestellen gegeben. Daraus kannst du schließen, dass zwei dieser Schnittpunkte **gleichzeitig Wendepunkte** des Graphen von f sind.

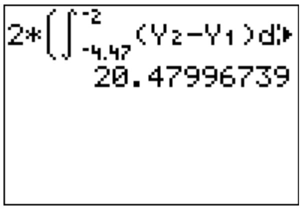
Da die Graphen von f und g **achsensymmetrisch** zur y-Achse sind, genügt es, die Flächeninhalte der Flächen rechts oder links der y-Achse zu berechnen und diese später mit 2 zu multiplizieren:

$$A = 2 \cdot \left(\int\limits_{-4{,}47}^{-2} (g(x) - f(x))\mathrm{d}x + \int\limits_{-2}^{0} (f(x) - g(x))\mathrm{d}x \right)$$

Bei dieser Rechnung ist dir wieder dein GTR behilflich:

Gib den Term in den Calculator-Modus deines GTR ein. Den Befehl für ein Integral findest du dann unter: `ALPHA → F1→ FUNC→ 4: fnInt`.

Du kannst $f(x)$ und $g(x)$ im `Y`-Menü ablegen. Wenn du das machst, musst du statt $f(x)$ bzw. $g(x)$ `Y1` bzw. `Y2` eintippen. Diese Variablen findest du unter `VARS → Y-VARS→ FUNCTION`.



Der Flächeninhalt der markierten Flächen beträgt 20,48 FE.

c) ▶ **Bestimmung der ersten Ableitung** (14P)

Beim Ableiten helfen dir die **Summenregel**, die **Potenzregel** und die **Faktorregel** weiter.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \cdot \tfrac{1}{20}x^3 - 2 \cdot \tfrac{6}{5}x \\ &= \tfrac{4}{20}x^3 - \tfrac{12}{5}x \\ &= \tfrac{1}{5}x^3 - \tfrac{12}{5}x \end{aligned}$$

Die erste Ableitung der Funktion f lautet: $f'(x) = \frac{1}{5}x^3 - \frac{12}{5}x$

▶ **Bestimmung der Steigung**

Die Steigung einer Funktion wird dir immer durch deren **erste Ableitung** gegeben. Gesucht ist also der **Funktionswert** der ersten Ableitung an der Wendestelle. Die Wendestellen sind in der Aufgabenstellung des Aufgabenteils b) gegeben. Setze die Wendestellen in die Funktionsgleichung der ersten Ableitung ein und berechne so die Steigung der Funktion an diesen Stellen.
Du kannst diese Aufgabe auch mit Hilfe deines GTR lösen.

Lösungsweg A

Die erste Ableitung der Funktion f kennst du bereits. Sie lautet: $f'(x) = \frac{1}{5}x^3 - \frac{12}{5}x$

Außerdem kennst du die Wendestellen der Funktion f: $x_1 = -2$; $x_2 = 2$

Setze jetzt x_1 und x_2 in die erste Ableitung der Funktion ein und bestimme so die Steigung:

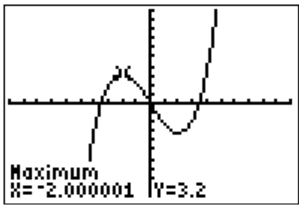
$$\begin{aligned} f'(-2) &= \tfrac{1}{5} \cdot (-2)^3 - \tfrac{12}{5} \cdot (-2) \\ &= \tfrac{16}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(2) &= \tfrac{1}{5} \cdot 2^3 - \tfrac{12}{5} \cdot 2 \\ &= -\tfrac{16}{5} \end{aligned}$$

Lösungsweg B (GTR)

Du kannst die Steigung des Graphen in den Wendepunkte auch mit Hilfe deines GTR berechnen.

Tippe die Funktion $f'(x)$ ins Y=-Menü deines Taschenrechners ein. Danach kannst du dir den Graphen der Funktion f' zeichnen lassen. Um die maximale Steigung des Graphen von f zu bestimmen, kannst du nun den Hochpunkt des Graphen von f' berechnen. Das geht über folgende Tastenkombination: `2nd →Calc → 4: maximum`.



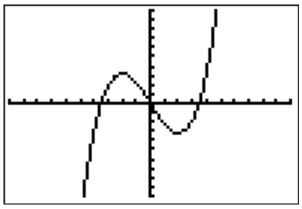
An der Stelle $x_1 = -2$ beträgt die Steigung des Graphen $\frac{16}{5}$, an der Stelle $x_2 = 2$ beträgt die Steigung des Graphen $-\frac{16}{5}$.

▶ Untersuchen der Zahlenwerte

Die Steigung einer Funktion wird dir immer durch deren **erste Ableitung** gegeben. Du musst also hier die Funktionswerte der Funktion f' betrachten. Um den **Wertebereich** der Steigung zu ermitteln, musst du die Grenzwerte der Funktion f' berechnen. Der Wertebereich umfasst alle Zahlen, welche eine Funktion als Funktionswert annehmen kann, also alle möglichen y-Werte.

Um herauszufinden, welche Funktionswerte die Steigung des Graphen von f annimmt, musst du ermitteln, welche Funktionswerte die erste Ableitung von f annimmt. Du musst also den Wertebereich der Ableitungsfunktion ermitteln. Schau dir dafür zunächst den Graphen der Funktion f' an:

Tippe die Funktion ins Y=-Menü deines Taschenrechners ein. Danach kannst du dir den Graphen der Funktion f zeichnen lassen.



Man könnte denken, dass der Graph von f **alle Zahlenwerte** in $\mathbb{R}$ annimmt. Das musst du jedoch noch mit Hilfe der Grenzwerte beweisen:

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = \lim_{x\to-\infty} \tfrac{1}{5}x^3 - \tfrac{12}{5}x$$
$$\to -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty} \tfrac{1}{5}x^3 - \tfrac{12}{5}x$$
$$\to \infty$$

Zusammengefasst bedeutet das:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) \to -\infty$
- $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) \to \infty$

Die Funktion f' nimmt also alle Werte zwischen $-\infty$ und ∞ an. Anders ausgedrückt: Sie nimmt alle Werte aus $\mathbb{R}$ an.

Der Graph von f besitzt alle Zahlenwerte aus $\mathbb{R}$ als Steigung.

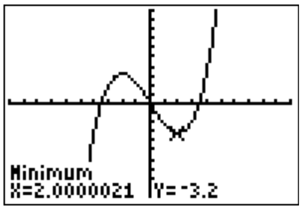
▶ Entscheiden, ob manche Zahlenwerte mehrfach auftreten

Schau dir nochmals den Graphen von f an und entscheide, welche Zahlenwerte aus $\mathbb{R}$ für die Steigung mehr als zweimal angenommen werden. Achte darauf, dass du tatsächlich die Steigung von f betrachtest und nicht die Funktionswerte von f.

In der Anlage 1 kannst du erkennen, dass die Funktion f **drei Extremstellen** hat. An diesen Stellen nimmt die Steigung der Funktion den Wert 0 an. Es gibt also Zahlenwerte aus $\mathbb{R}$, die mehr als zweimal als Steigung auftreten, da die Funktion f drei Extremstellen hat.

Um den **Zahlbereich** für die Zahlenwerte der Steigung, welche wiederholt auftreten, anzugeben, kannst du dir den Graphen der Ableitungsfunktion f' anschauen. Die Ableitungsfunktion nimmt diejenigen Funktionswerte mehr als zweimal an, die zwischen dem Funktionswert des **Minimums** und dem Funktionswert des **Maximums** der Ableitungsfunktion f' liegen. Daher musst du die Funktionswerte des Maximums und des Minimums von f' bestimmen. Lass dir den Graphen von f' zunächst im Grafik-Menü deines GTR zeichnen:

Tippe den Funktionsterm $f'(x)$ ins Y=-Menü deines Taschenrechners ein. Danach kannst du dir den Graphen der Funktion f' zeichnen lassen.



Die Funktionswerte der Extrempunkte des Graphen von f' entsprechen gerade der Steigung des Graphen von f in den Wendepunkten. Diese hast du bereits ermittelt.

Der Funktionswert des **Maximums** der Ableitungsfunktion f' ist 3,2.

Der Funktionswert des **Minimums** der Ableitungsfunktion f' ist -3,2.

Die Werte zwischen $-3,2$ und $3,2$ werden von f' dreimal angenommen. Die Werte in diesem Bereich nimmt die Steigung von f also mehr als zweimal an.

Der Zahlbereich derer Werte, die mehr als zweimal als Steigung des Graphen von f auftreten ist: $-3,2 < x < 3,2$

d) **▶ Nachweis des Sattelpunkts** (12P)

Ein Sattelpunkt ist ein **Wendepunkt mit waagrechter Tangente**. Damit sich an der Stelle $x = 0$ ein Sattelpunkt befindet, musst du zeigen, dass folgendes gilt:

$g_0'(x = 0) = 0$

$g_0''(x = 0) = 0$

$g_0'''(x = 0) \neq 0$

1. Schritt: Zeigen von $g_0'(x = 0) = 0$

Setze $k = 0$ und $x = 0$ in $g_k'(x)$ (s. Aufgabenstellung) ein:

$g_k'(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - k \cdot x \qquad | \; k = 0;\ x = 0$

$g_0(0) = \frac{1}{3} \cdot 0^3 - 2 \cdot{}^2 - k \cdot 0$

$= 0$

Für die erste Ableitung von $g_k(x)$ gilt: $g_0'(0) = 0$

2. Schritt: Zeigen von $g_0''(x = 0) = 0$

Setze $k = 0$ und $x = 0$ in $g_k''(x)$ (s. Aufgabenstellung) ein:

$g_k''(x) = x^3 - 4x^2 - k \qquad | \; k = 0;\ x = 0$

$g_0''(0) = 0^3 - 4 \cdot 0^2 - 0$

$= 0$

Für die zweite Ableitung von $g_k(x)$ gilt: $g_0''(0) = 0$

3. Schritt: Zeigen von $g_0'''(x = 0) \neq 0$

Um $g_k'''(x)$ zu erhalten, musst du zunächst $g_k''(x)$ ableiten:

$g_k'''(x) = 2x - 4$

Setze nun $k = 0$ und $x = 0$ in $g_k''(x)$ ein:

$$g_k'''(x) = 2x - 4 \qquad | \ k = 0;\ x = 0$$
$$g_0'''(0) = 0 - 4$$
$$= -4$$

Für die dritte Ableitung von $g_k(x)$ gilt: $g_0'''(0) = -4 \neq 0$

Die erste und zweite Ableitung an der Stelle $x = 0$ sind Null. Die dritte Ableitung ist ungleich Null. Daher befindet sich an der Stelle $x = 0$ ein Sattelpunkt.

▶ Bestimmen des Parameters k

Ein Sattelpunkt ist ein **Wendepunkt mit waagrechter Tangente**. Das bedeutet, dass die **erste und zweite Ableitung** an der Stelle $x_S = 3$, an der sich der Sattelpunkt befindet, gleich Null sein müssen. Die **dritte Ableitung** an der Stelle $x_S = 3$ muss ungleich Null sein. Die ersten beiden Ableitungen der Funktion g_k sind in der Aufgabenstellung gegeben. Du kannst sie ohne Nachweis verwenden. Die dritte Ableitung erhältst du, indem du die zweite Ableitung nochmals ableitest. Setze nun die Stelle $x_S = 3$ in die erste und zweite Ableitung ein, setze die entstandenen Terme jeweils gleich Null und löse die Gleichung nach k auf. Zum Schluss musst $x_S = 3$ noch in die dritte Ableitung einsetzen.

1. Schritt: Erste Ableitung

Setze $x_S = 3$ in die erste Ableitung $g_k'(x)$ von $g_k(x)$ ein. Die erste Ableitung findest du in der Aufgabenstellung:

$$g_k'(3) = \tfrac{1}{3} \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^2 - k \cdot 3$$
$$g_k'(3) = -9 - 3k$$

Setze jetzt $g_k'(3)$ gleich Null und löse die Gleichung nach k auf:

$$g_k'(3) = 0$$
$$-9 - 3k = 0 \qquad | \ +9$$
$$-3k = 9 \qquad | : (-3)$$
$$k = -3$$

Für $k = -3$ ist die erste Ableitung von $g_k'(x)$ gleich Null.

2. Schritt: Zweite Ableitung

Damit sich an der Stelle $x_S = 3$ ein Sattelpunkt befindet, muss die zweite Ableitung von $g_k(3)$ auch Null sein.

Setze $x_S = 3$ in die zweite Ableitung $g_k''(x)$ von $g_k(x)$ ein. Die zweite Ableitung findest du ebenfalls in der Aufgabenstellung:

$$g_k''(3) = 3^3 - 4 \cdot 3 - k$$
$$g_k''(3) = -3 - k$$

Setze jetzt $g_k''(3)$ gleich Null und löse die Gleichung nach k auf:

$$g_k''(3) = 0$$
$$-3 - k = 0 \qquad | \ +3$$
$$-k = 3 \qquad | \ \cdot(-1)$$
$$k = -3$$

Für $k = -3$ ist die zweite Ableitung von $g_k'(x)$ gleich Null.

3. Schritt: Dritte Ableitung

Damit sich an der Stelle $x_S = 3$ ein Sattelpunkt befindet, muss die dritte Ableitung von $g_k(3)$ **ungleich Null** sein.

Setze $x_S = 3$ in die dritte Ableitung $g_k'''(x)$ von $g_k(x)$ ein. Die dritte Ableitung ist in der Aufgabenstellung nicht gegeben. Du kannst sie aber bilden, indem du die zweite Ableitung ableitest:

$g_k'''(x) = 2x - 4$

Jetzt kannst du $x_S = 3$ in die dritte Ableitung, die von k unabhängig ist, einsetzen:

$g_k'''(3) = 2 \cdot 3 - 4$

$g_k'''(3) = 2$

Die dritte Ableitung ist an der Stelle $x_S = 3$ ungleich Null.

Für $k = -3$ und $x_S = 3$ sind die erste und zweite Ableitung von g_k gleich Null. Die dritte Ableitung ist bei $x_S = 3$ ungleich Null. Daher befindet sich für $k = -3$ ein Sattelpunkt an der Stelle $x_S = 3$ des Graphen von $g_k(x)$.

► Untersuchen der Wendestellen

Für eine Wendestelle x_W muss gelten: $g_k''(x_W) = 0$ (notwendige Bedingung). Die Wendestellen einer Funktion sind **Nullstellen der zweiten Ableitung der Funktion**. Damit eine Funktion keine Wendestellen hat, darf die zweite Ableitung der Funktion keine Nullstellen haben. Bestimme k also so, dass die zweite Ableitung keine Nullstellen besitzt.

Damit die Funktion g_k keine Wendestellen hat, darf die zweite Ableitung von g_k, g_k'', **keine Nullstellen** haben. Die Nullstellen von g_k'' sind $x = 2 + \sqrt{k+4}$ oder $x = 2 - \sqrt{k+4}$. Wenn du k so wählst, dass die beiden Terme nicht definiert sind, dann hat g_k'' keine Nullstellen und $g_k(x)$ keine Wendestellen.

Überlege dir, für welche Parameter k die beiden Terme **nicht definiert** sind. Achte dabei auf die **Wurzel**. Wenn der Term unter der Wurzel kleiner als Null ist, ist die Wurzel nicht definiert. Dies ist für $k < -4$ der Fall. Wenn du eine Zahl kleiner -4 für k einsetzt, wird die Zahl unter der Wurzel negativ; die Wurzel ist dafür nicht definiert.

Für $k < -4$ hat die Funktion g_k'' keine Nullstellen. Das heißt, die Funktion g_k hat für $k < -4$ keine Wendestellen.