a) **▶ Achsenschnittpunkte des Graphen von g bestimmen** (13P)

Achsenschnittpunkte beschreiben die Punkte, an denen der Graph der Funktion g die Koordinatenachsen schneidet.
Man unterscheidet zwischen x- und y-Achsenschnittpunkten.

An y-Achsenschnittpunkten gilt $x = 0$ und für x-Achsenschnittpunkte musst du die Bedingung $g(x) = 0$ prüfen.

Der Graph jeder Funktion hat genau einen y-Achsenschnittpunkt.

Bestimme nun zunächst den y-Achsenschnittpunkt.

1. Schritt: y-Achsenschnittpunkt bestimmen

Nach obiger Bedingung gilt an y-Achsenschnittpunkten $x = 0$.
Bestimme also den Wert $y = g(0)$. Dieser beschreibt den y-Wert des y-Achsenschnittpunktes.

$$\begin{aligned} y &= g(0) \\ &= \frac{1}{3} \cdot 0^3 + 2 \cdot 0^2 - 5 \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Somit ergibt sich der y-Achsenschnittpunkt mit $Q(0 \mid 0)$.

2. Schritt: Schnittpunkte mit der x-Achse bestimmen

Wir haben bereits die Bedingung aufgestellt, dass an x-Achsenschnittpunkten gilt $g(x) = 0$.

Löse die Gleichung $g(x) = 0$ folglich nach x auf.

$$\begin{aligned} g(x) &= 0 \\ 0 &= \frac{1}{3} \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 - 5 \cdot x \qquad \mid x \text{ ausklammern} \\ 0 &= x \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot x^2 + 2 \cdot x - 5 \right) \end{aligned}$$

Hier kannst du den Satz vom Nullprodukt anwenden, der aussagt, dass ein Produkt immer genau dann Null wird, wenn einer der Faktoren Null ist.

Somit ergibt sich die erste Nullstelle für $x_1 = 0$.

Setze nun den restlichen Term gleich Null und bestimme x.

$$\frac{1}{3} \cdot x^2 + 2 \cdot x - 5 = 0$$

Hierbei handelt es sich um eine quadratische Gleichung, die du entweder mit der pq- oder mit der abc-Formel bestimmen kannst.

(Beachte: Die abc-Formel wird auch Mitternachtsformel genannt.)

▶▶ Lösungsweg A: abc-Formel

Die abc-Formel, oder auch Mitternachtsformel genannt, kannst du bei Gleichungen anwenden, die in der Form

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

vorliegen. Dies ist bei der zu untersuchenden Gleichung mit $\frac{1}{3} \cdot x^2 + 2 \cdot x - 5 = 0$ der Fall.

Lies die Koeffizienten a, b und c aus der Gleichung aus und setze sie in die abc-Formel ein.

Die abc-Formel lautet allgemein:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Es ergeben sich die folgenden Werte für die Koeffizienten.

$$a = \frac{1}{3}; \quad b = 2; \quad c = -5$$

Setze diese in die Formel ein und bestimme dann die x-Werte.

$$\begin{aligned} x_{2,3} &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-5) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)}}{2 \cdot \frac{1}{3}} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + \left(\frac{20}{3}\right)}}{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{\frac{12}{3} + \frac{20}{3}}}{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{\frac{32}{3}}}{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{16 \cdot \frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{-2 \pm 4 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

Die Wurzel kannst du mit dem Taschenrechner bestimmen.

Daraus ergibt sich

$$x_2 \approx -1{,}90$$

$$x_3 \approx 7{,}90$$

Somit ergeben sich die x-Achsenschnittpunkte bei $N_1(-7{,}90 \mid 0)$ und $N_2(1{,}90 \mid 0)$. Es sind folglich alle Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen bestimmt.

▸▸ Lösungsweg B: *pq*-Formel

Die pq-Formel kannst du verwenden, wenn du eine Gleichung in der Form

$$x^2 + p \cdot x + q = 0$$

vorliegen hast. Die zu lösende Gleichung hat die Form

$$\frac{1}{3} \cdot x^2 + 2 \cdot x - 5 = 0$$

vor. Multipliziere die Gleichung folglich mit 3 durch, um den Faktor vor dem x^2 zu eliminieren.

Die Gleichung lautet nun

$$x^2 + 6 \cdot x - 15 = 0$$

Aus dieser Gleichung kannst du nun die Parameter p und q auslesen. Diese lauten:

$p = 6; \quad q = -15$

Setze diese in die pq-Formel ein.

$$\begin{aligned}
x_{2,3} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q} \\
&= -\frac{6}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{6}{2}\right)^2 - (-15)} \\
&= -3 \pm \sqrt{(3)^2 - (-15)} \\
&= -3 \pm \sqrt{9 - (-15)} \\
&= -3 \pm \sqrt{24} \\
&= -3 \pm \sqrt{4 \cdot 6} \\
&= -3 \pm 2 \cdot \sqrt{6} \\
x_1 &= -3 - 2 \cdot \sqrt{6} \\
x_2 &= -3 + 2 \cdot \sqrt{6}
\end{aligned}$$

Es gilt

$x_2 = 3 - 2 \cdot \sqrt{6} \approx -7{,}90$

$x_3 = 3 + 2 \cdot \sqrt{6} \approx 1{,}90$

Somit ergeben sich die x-Achsenschnittpunkte bei $N_1(-7{,}90 \mid 0)$ und $N_2(1{,}90 \mid 0)$. Es sind folglich alle Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen bestimmt.

▶ Zeigen, dass einer der Punkte auch zum Graph von f gehört

Prüfe nacheinander die Punkte, indem du die Koordinaten in die Funktionsgleichung von f einsetzt.
Prüfe zunächst den y-Achsenschnittpunkt, da dieser die Koordinaten $Q(0 \mid 0)$ hat. Dem zufolge ist er relativ einfach zu prüfen.

1. Schritt: y-Achsenschnittpunkt prüfen

Setze die Koordinaten des y-Achsenschnittpunktes vom Graphen von g in die Funktionsgleichung von f ein. Es muss eine wahre Aussage resultieren, sodass der Punkt auch auf dem Graphen von f liegt.

Der y-Achsenschnittpunkt hatte die folgenden Koordinaten.

$Q(0 \mid 0)$

Es ergibt sich die folgende Gleichung, die du dann prüfen musst.

$$\begin{aligned}
f(0) &= 0 \\
0 &= -0 \cdot \mathrm{e}^{-0} \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

Dabei handelt es sich um eine wahre Aussage, sodass bewiesen ist, dass die

y-Achsenschnittpunkte der Graphen von f und g identisch sind.

Da die beiden Graphen nach der Aufgabenstellung genau einen gemeinsamen Punkt haben sollen, ist dieser somit gefunden. Folglich musst du die Schnittpunkte mit der x-Achse nicht mehr prüfen, sodass weitere Lösungsschritte hinfällig sind.

▶ Winkel zwischen den Tangenten im y-Achsenschnittpunkt bestimmen

Die allgemeine Tangentengleichung lautet

$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Den Winkel einer Geraden gegenüber der Horizontalen kannst du über die Gleichung

$\tan\alpha = m$

bestimmen, wobei m die Steigung der Geraden ist. Bei Tangenten handelt es sich um Geraden, die an der jeweiligen Kurve anliegen.
Die Differenz der Winkel zwischen der jeweiligen Tangente und der Horizontalen ist dann der gesuchte Winkel. Es gilt

$\gamma = |\alpha - \beta|$

Der Winkel α beschreibt den Winkel von t_g zwischen der Tangente und der Horizontalen.
β ist dann der Winkel zwischen der Tangente t_f am Graphen von f und der Horizontalen.

Die Betragsstriche bewirken, dass es egal ist, in welcher Reihenfolge du die beiden Winkel voneinander abziehst.

Gehe nach folgendem Prinzip vor.

1. Ableitungen von f und g bestimmen
2. Tangentengleichungen mit $x_0 = 0$ bestimmen
3. Winkel zwischen den einzelnen Tangenten und der Horizontalen bestimmen
4. γ bestimmen

Leite folglich zunächst die beiden Funktionen wie folgt ab.

1. Schritt: f und g ableiten

Die beiden Funktionen sind wie folgt gegeben.

$f(x) = -x \cdot \mathrm{e}^{-x}$

$g(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 - 5 \cdot x$

Beim Term $f(x)$ handelt es sich um ein Produkt, sodass du die Produktregel anwenden musst, um die Ableitung zu bestimmen.

$f'(x) = (-1) \cdot \mathrm{e}^{-x} + (-x) \cdot (-1) \cdot \mathrm{e}^{-x} = -\mathrm{e}^{-x} + x \cdot \mathrm{e}^{-x}$

Bilde nun die Ableitung von g.

$g'(x) = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x - 5 = x^2 + 4 \cdot x - 5$

Aus diesen Ableitungen kannst du die Steigungen der Tangenten im Ursprung bestimmen.

2. Schritt: Gleichungen der Tangenten bestimmen

Nun kannst du die Tangentengleichung von oben anwenden. Diese lautete:

$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Du hast den Punkt $Q(0 \mid 0)$ bestimmt, an dem die Tangente anliegen soll. Folglich gilt $x_0 = 0$ und $f(x_0) = 0$.
Es ergeben sich die beiden Tangentengleichungen

$t_f(x) = f'(0)(x - 0) + 0$

$t_g(x) = g'(0)(x - 0) + 0$

Bestimme die Werte für $g'(0)$ und $f'(0)$.

$g'(0) = 0^2 + 4 \cdot 0 - 5 = -5$

$f'(0) = -\mathrm{e}^{-0} + 0 \cdot \mathrm{e}^{-0} = -1$

Somit ergeben sich die folgenden Tangentengleichungen.

$t_g(x) = -5 \cdot x$

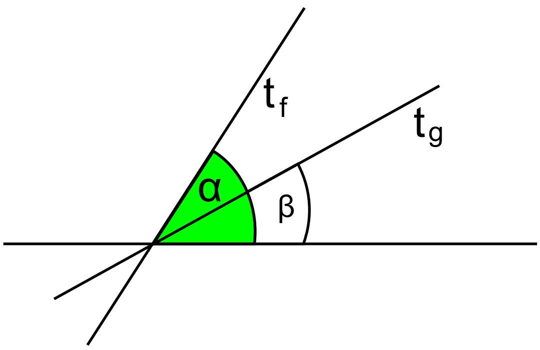
$t_f(x) = -1 \cdot x$

3. Schritt: Winkel zwischen den Tangenten bestimmen

Den Winkel zwischen den Tangenten kannst du über die Formel

$\tan \alpha = m$

bestimmen. Diese Formel berechnet allerdings den Winkel, der zwischen der Geraden und der Horizontalen eingeschlossen wird. Dies kannst du dir wie in folgender Skizze dargestellt vorstellen.



Um also den Winkel zwischen den beiden Tangenten zu finden, musst du zunächst die Winkel gegenüber der Horizontalen berechnen. Bilde dann die Differenz dieser Winkel, um den gesuchten Winkel zu erhalten.

4. Schritt: Winkel gegenüber der Horizontalen bestimmen

Berechne nun die Winkel gegenüber der Horizontalen. Verwende die oben gegebene Formel dafür.

Es gilt:

$m_g = -5$ und $m_f = -1$

Es ergeben sich die folgenden Terme zur Berechnung der Winkel.

$\tan\alpha = m_g \qquad \tan\beta = m_f$

Setze die Werte für die Steigungen ein und bestimme die zugehörigen Winkel.

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= -5 \qquad &&|\ \arctan() \\ \alpha &\approx -78{,}69° \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= -1 \qquad &&|\ \arctan() \\ \alpha &= -45° \end{aligned}$$

Bilde nun die Differenz der beiden Winkel.

$|\alpha - \beta| = |-78{,}69° - (-45°)| = |-33{,}69°| = 33{,}69°$

Somit schließen die beiden Tangenten einen Winkel von 33,69° ein.

b) ► **Tiefpunkte der Graphen von f und g auf einer Geraden nachweisen** (8P)

Die Tiefpunkte der Graphen der beiden Funktionen f und g sollen laut der Aufgabenstellung auf einer zur y-Achse parallelen Gerade liegen. Jede zur y-Achse parallelen Gerade wird durch einen konstanten x-Wert beschrieben.
Damit die beiden Tiefpunkte auf dieser Geraden liegen, müssen sie dieselben x-Koordinaten haben.

Es gilt die notwendige Bedingung für Tiefpunkte mit $f'(x) = 0$ und die hinreichende Bedingung mit $f''(x) > 0$.
Die Aufgabe gibt dir allerdings den Hinweis, dass auf das hinreichende Kriterium verzichtet werden kann.

Setze folglich die beiden Ableitungen f' und g' gleich Null, um die Stellen der Tiefpunkte zu erhalten.
Setze diese abschließend wieder in zugehörigen Funktionsgleichungen ein. Es ergeben sich nach der Aufgabenstellung zwei Punkte, die dieselbe x-Koordinate haben.

1. Schritt: Ableitungen gleich Null setzen

Die Ableitungen hast du bereits im Teil a) bestimmt. Sie lauten

$f'(x) = -e^{-x} + x \cdot e^{-x}$

$g'(x) = x^2 + 4 \cdot x - 5$

Setze diese gleich Null und löse nach x auf.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ -e^{-x} + x \cdot e^{-x} &= 0 \qquad &&|\ e^{-x} \text{ ausklammern} \\ e^{-x} \cdot (-1 + x) &= 0 \end{aligned}$$

Hier kannst du nun den Satz vom Nullprodukt anwenden, der aussagt, dass ein Produkt immer genau dann gleich Null wird, wenn einer der Faktoren Null wird.

Da der Term e^{-x} niemals Null wird, kannst du einfach den Term $-1+x=0$ setzen und nach x auflösen. Dies ergibt dann die gesuchte Stelle des Tiefpunktes.

$$\begin{aligned} -1+x &= 0 \qquad \mid +1 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Somit hat die Funktion nur ein einziges Extremum, das nach der Aufgabe das Minimum sein muss.

Setze nun die Ableitung von g gleich Null.

$$\begin{aligned} g'(x) &= 0 \\ x^2+4\cdot x-5 &= 0 \end{aligned}$$

Hierbei handelt es sich um eine quadratische Gleichung, die du mit der *abc*- oder *pq*-Formel lösen kannst.

(Beachte: Die abc-Formel wird auch Mitternachtsformel genannt)

►► Lösungsweg A: *pq*-Formel

Die pq-Formel kannst du bei Gleichungen anwenden die in der Form

$x^2+p\cdot x+q=0$

vorliegen. Da deine Funktion in dieser Form vorliegt, kannst du die Parameter p und q auslesen.
Wichtig ist für die Verwendung der pq-Formel, dass sich vor dem x^2 kein Parameter befindet.

Es ergeben sich die folgenden Werte für p und q.

$p=4$ und $q=-5$

Setze diese Werte in die pq-Formel wie folgt ein.

$$\begin{aligned} x_{1,2} = &= -\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} \\ &= -\frac{4}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2-(-5)} \\ &= -2\pm\sqrt{(2)^2+5} \\ &= -2\pm\sqrt{4+5} \\ &= -2\pm\sqrt{9} \\ &= -2\pm 3 \\ x_1 &= -5 \\ x_2 &= 1 \end{aligned}$$

Somit ergeben sich die beiden Werte für x mit $x_1=-5$ und $x_2=1$.

►► Lösungsweg B: *abc*-Formel

Die *abc*-Formel kannst du bei quadratischen Gleichungen anwenden, die in der Form

$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$

vorliegen. Lies aus deiner gegebenen Gleichung die Parameter a, b und c aus.
Diese haben die folgenden Werte.

$a = 1$, $b = 4$ und $c = -5$

Setze diese Werte in die *abc*-Formel ein und löse sie so auf:

$$\begin{aligned}
x_{1,2} = &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-5)}}{2} \\
&= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - (-20)}}{2} \\
&= \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} \\
&= \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2} \\
&= \frac{-4 \pm 6}{2} \\
x_1 &= \frac{-10}{2} \\
x_1 &= -5 \\
x_2 &= \frac{2}{2} \\
x_2 &= 1
\end{aligned}$$

Somit ergeben sich die beiden Werte für x mit $x_1 = -5$ und $x_2 = 1$.

2. Schritt: Ergebnisse auswerten

Vergleiche nun die eben bestimmten Werte für x.
Es ergaben sich durch die obigen Rechnungen die folgenden Tiefpunkte
<u>für den Graphen von f:</u>

$x = 1$

<u>für den Graphen von g:</u>

$x_1 = -5$

$x_2 = 1$

Nach der Vorgabe zu Beginn der Lösung, müssen die Tiefpunkte dieselbe x-Koordinate besitzen, damit sie auf einer zur y-Achse parallelen Gerade liegen.
Es gilt $x_2 = 1 = x$.
Somit liegen zwei der Tiefpunkte der Graphen von f und g auf einer zur y-Achse parallelen Gerade, die die Gleichung $x = 1$ besitzt.

c) ▶ **Wendepunkte bestimmen** (10P)

Für Wendepunkte an der Stelle x_W gilt die notwendige Bedingung $f''(x_W) = 0$ und die hinreichende Bedingung $f'''(x_W) \neq 0$.
Die Aufgabe gibt dir vor, dass es genau einen Wendepunkt für jeden der beiden Graphen gibt. Erhältst du folglich nur ein Ergebnis für $f''(x) = 0$ bzw. für $g''(x) = 0$, so kannst du dieses als die Stelle des Wendepunktes betrachten, ohne die hinreichende Bedingung zu prüfen.

Du hast bereits die 1. Ableitung von f und g bestimmt. Leite diese folglich noch zwei weitere Male ab, um die 2. und 3. Ableitung zu erhalten.

$f'(x) = -\mathrm{e}^{-x} + x \cdot \mathrm{e}^{-x}$

$f''(x) = \mathrm{e}^{-x} - x \cdot \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x} = 2 \cdot \mathrm{e}^{-x} - x \cdot \mathrm{e}^{-x}$

$f'''(x) = -2 \cdot \mathrm{e}^{-x} + x \cdot \mathrm{e}^{-x} - \cdot \mathrm{e}^{-x} = -3 \cdot \mathrm{e}^{-x} + x \cdot \mathrm{e}^{-x}$

$g'(x) = x^2 + 4 \cdot x - 5$

$g''(x) = 2 \cdot x + 4$

$g'''(x) = 2$

Setze nun $g''(x) = 0$ und $f''(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ 2 \cdot \mathrm{e}^{-x} - x \cdot \mathrm{e}^{-x} &= 0 \\ \mathrm{e}^{-x} \cdot (2 - x) &= 0 \end{aligned}$$

Hier kannst du den Satz des Nullprodukts anwenden, der aussagt, dass ein Produkt immer genau dann Null wird, wenn einer der Faktoren Null wird.

Allerdings wird der Term e^{-x} niemals Null, sodass du nur prüfen musst $2 - x = 0$.

$$\begin{aligned} 2 - x &= 0 \qquad | +x \\ 2 &= x \end{aligned}$$

Somit ergibt sich nur eine Nullstelle der zweiten Ableitung von f, sodass nach der Voraussetzung an dieser Stelle der Graph von f einen Wendepunkt besitzt.

Bestimme nun die Nullstelle bzw. Nullstellen von g.

$$\begin{aligned} g''(x) &= 0 \\ 2 \cdot x + 4 &= 0 \qquad | -4 \\ 2 \cdot x &= -4 \qquad | :2 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Für $g'''(x) = 2$ gilt unabhängig vom x-Wert immer $g'''(x) \neq 0$, sodass sich an der Stelle $x = -2$ der Wendepunkt des Graphen von g befindet.

► Sachverhalt skizzieren

Der Sachverhalt setzt sich aus mehreren Teilen zusammen. Zum einen sollen die Wendepunkte diagonal gegenüberliegende Eckpunkte eines Rechtecks sein.
Dieses soll außerdem symmetrisch zur y-Achse sein. Abschließend sollst du noch die fehlenden Eckpunkte bestimmen.

1. Schritt: Koordinaten der Wendepunkte bestimmen

Bestimme zunächst die vollständigen Koordinaten der beiden Wendepunkte.
Setze dazu die bestimmten x-Werte in die jeweilige Funktionsgleichung ein und berechne die zugehörigen Werte.

Es ergeben sich die folgenden Werte:

$$f(2) = -2 \cdot \mathrm{e}^{-2} = -\frac{2}{\mathrm{e}^2} \approx -0,27$$

$$\begin{aligned} g(-2) &= \frac{1}{3} \cdot (-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 - 5 \cdot (-2) \\ &= \frac{1}{3} \cdot (-8) + 8 + 10 \\ &= -\frac{8}{3} + 18 \\ &\approx 15,33 \end{aligned}$$

Somit ergeben sich die beiden Wendepunkte mit

$W_f\,(2 \mid -0,27)$

$W_g\,(-2 \mid 15,33)$

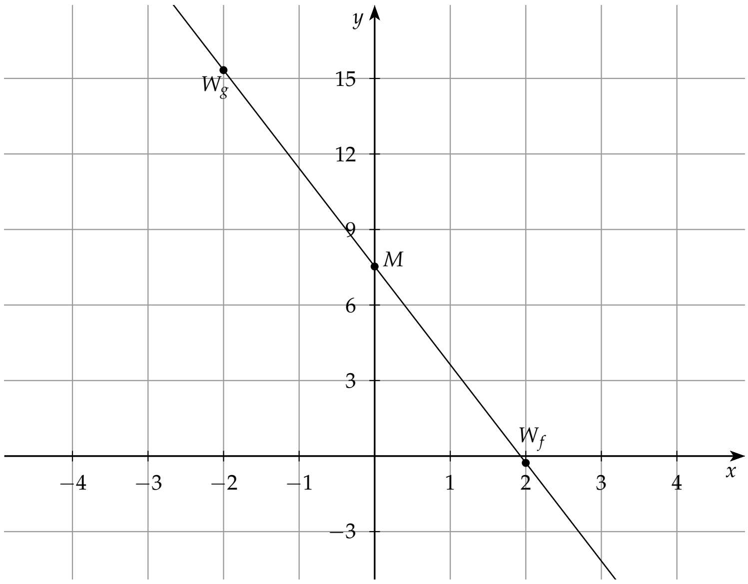
Zeichne diese nun in ein geeignetes Koordinatensystem ein.

2. Schritt: W_g und W_f in Koordinatensystem eintragen

Trage die beiden Wendepunkte in ein geeignetes Koordinatensystem ein. Da sie diagonal gegenüberliegende Eckpunkte sein sollen, kannst du sie mit einer Geraden verbinden.

Da das Rechteck außerdem symmetrisch zur y-Achse sein soll, beschreibt der Schnittpunkt der Diagonalen W_gW_f mit der y-Achse den Mittelpunkt M des Rechtecks.

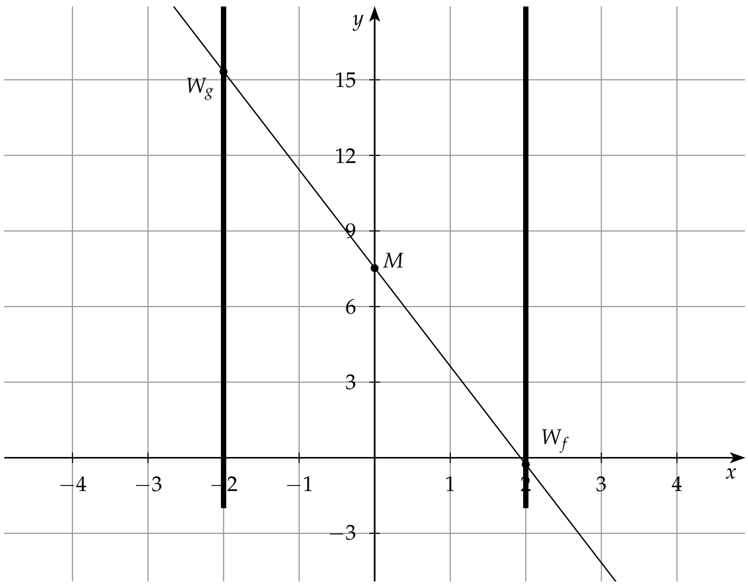
Es ergibt sich das folgende Bild.



3. Schritt: Rechteck konstruieren

Da das Rechteck symmetrisch zur y-Achse liegt, kannst du die Seiten durch W_f und W_g parallel zur y-Achse einzeichnen.

Das Bild sieht nun so aus:

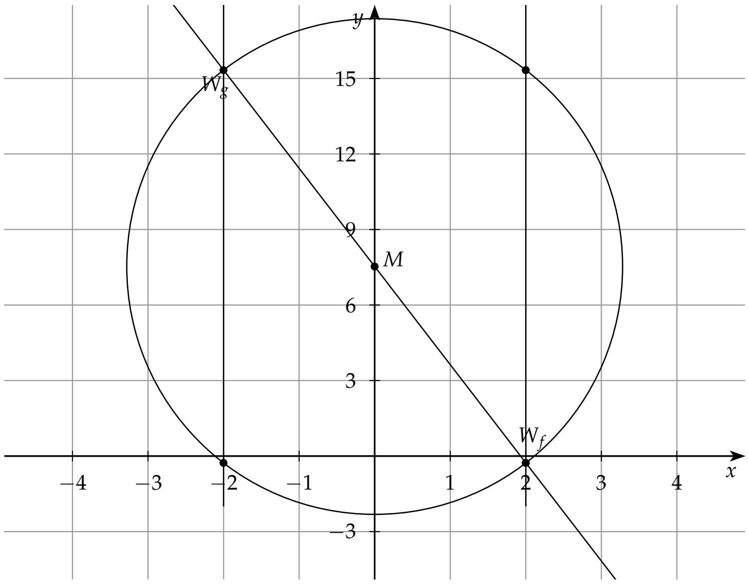


Ziehe nun einen Kreis mit dem Radius $\overline{MW_g}$ um den Mittelpunkt.

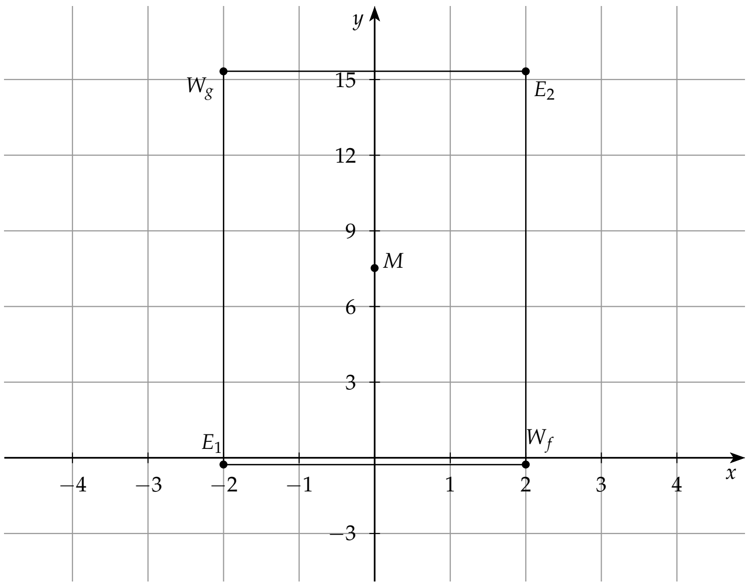
Die Schnittpunkte mit den eben eingezeichneten Seiten sind die fehlenden Eckpunkte.

Dies ist darin begründet, dass in einem Rechteck alle Eckpunkte gleich weit vom Mittelpunkt entfernt sind.

Es ergibt sich das folgende Bild:



Somit hast du jetzt alle vier Punkte, aus denen du das Rechteck zusammenfügen kannst. Verbinde diese, sodass du das gesuchte Rechteck erhältst.



4. Schritt: Koordinaten der restlichen Eckpunkte

Aus dem Bild kannst du erkennen, dass die Seiten entweder parallel zur x- oder y-Achse verlaufen.

Somit kannst du aus dem Bild und den Koordinaten der Punkte W_g und W_f die Koordinaten von E_1 und E_2 bestimmen.

Es ergeben sich die folgenden Koordinaten der Punkte E_1 und E_2:

$E_1(-2 \mid -0{,}27)$ und $E_2(2 \mid 15{,}33)$

d) **▶ F als Stammfunktion von f nachweisen** (5P)

Ist dir eine Funktion F als Stammfunktion einer bereits gegebenen Funktion f gegeben, so zeigst du am besten, dass F Stammfunktion von f ist, indem du F einmal ableitest.
Du musst den Funktionsterm von f für F' erhalten, sodass gilt $f(x) = F'(x)$.

Leite die Funktion F nach den Produktregeln und den Regeln zum Ableiten der e-Funktion ab.

$$\begin{aligned}
F(x) &= (x+1)\cdot \mathrm{e}^{-x} \\
F(x)' &= 1\cdot \mathrm{e}^{-x} + (-(x+1)\cdot \mathrm{e}^{-x}) \\
&= 1\cdot \mathrm{e}^{-x} + (-x\cdot \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}) \\
&= \mathrm{e}^{-x} - x\cdot \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} \\
&= -x\cdot \mathrm{e}^{-x}
\end{aligned}$$

Dieser Term ist gerade der Funktionsterm der Funktion f, sodass gilt $F'(x) = f(x)$. Damit ist Vorgabe erfüllt. F ist folglich Stammfunktion von f.

▶ Größe der Fläche bestimmen

Das Emblem soll dargestellt werden durch die Fläche, die durch die beiden Graphen sowie der Geraden $x = 1{,}5$ im IV. Quadrant eingeschlossen wird.
Die Skizze in der Aufgabenstellung soll dies verdeutlichen.

Die Fläche unter Kurven kannst über das Integral bestimmen. Die Grenzen des Integrals werden durch die Aufgabe gegeben.
Aussagen aus der Aufgabenstellung, dass die Fläche durch Geraden mit $x = ...$ beschränkt werden, geben dir immer direkt die Grenzen des Integrals.
Die Skizze zeigt dir, dass die Kurven durch den Ursprung laufen, sodass dir die 1. Grenze auf jeden Fall mit $x = 0$ gegeben ist.

Mit der Geraden $x = 1{,}5$ und der oben stehenden Bedingung ergibt sich, dass die Grenzen mit $x_1 = 0$ und $x_2 = 1{,}5$ festgelegt sind.

Die Fläche kannst du bestimmen, indem du die Integrale innerhalb der Grenze voneinander subtrahierst:

$$A = \left| \int_0^{1{,}5} g(x)\mathrm{d}x - \int_0^{1{,}5} f(x)\mathrm{d}x \right|$$

Die Betragsstriche dienen dazu, dass du einen positiven Flächeninhalt erhältst.
Ansonsten kann es passieren, dass der Flächeninhalt negativ wird, abhängig davon, in welcher Reihenfolge du die beiden Integrale voneinander subtrahierst.

Bestimme zunächst die beiden Integrale und im folgenden die gesuchte Fläche.

1. Schritt: Integrale berechnen

Um die Integrale zu berechnen, musst du zunächst eine Stammfunktion der Funktionen bestimmen:

Es gilt:

$$\int_0^{1,5} g(x)\mathrm{d}x = [G(x)]_0^{1,5} = G(1,5) - G(0)$$

$$\int_0^{1,5} f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_0^{1,5} = F(1,5) - F(0)$$

Bestimme nun zunächst das Integral

$$\int_0^{1,5} g(x)\mathrm{d}x = G(1,5) - G(0).$$

Integriere dazu zunächst die Funktion g. Dies kannst du so angehen:

$$g(x) = \frac{1}{3}\cdot x^3 + 2\cdot x^2 - 5\cdot x$$

$$\begin{aligned}\int_0^{1,5} g(x)\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{3\cdot 4}\cdot x^4 + 2\cdot\frac{1}{3}\cdot x^3 - 5\cdot\frac{1}{2}\cdot x^2\right]_0^{1,5}\\ &= \left[\frac{1}{12}\cdot x^4 + \frac{2}{3}\cdot x^3 - \frac{5}{2}\cdot x^2\right]_0^{1,5}\\ &= \left(\frac{1}{12}\cdot 1,5^4 + \frac{2}{3}\cdot 1,5^3 - \frac{5}{2}\cdot 1,5^2\right) - \left(\frac{1}{12}\cdot 0^4 + \frac{2}{3}\cdot 0^3 - \frac{5}{2}\cdot 0^2\right)\\ &= \frac{1}{12}\cdot 1,5^4 + \frac{2}{3}\cdot 1,5^3 - \frac{5}{2}\cdot 1,5^2\end{aligned}$$

Den Wert dieses Terms kannst du mit Hilfe deines Taschenrechners bestimmen. Es ergibt sich der folgende Wert.

$$\frac{1}{12}\cdot 1,5^4 + \frac{2}{3}\cdot 1,5^3 - \frac{5}{2}\cdot 1,5^2 \approx -2,95$$

Bestimme nun das Integral von f in den gegebenen Grenzen.

$f(x) = -x\cdot \mathrm{e}^{-x}$

Die Aufgabe gibt dir bereits eine Stammfunktion der Funktion f mit $F(x) = (x+1)\cdot\mathrm{e}^{-x}$ vor.

Folglich darfst du nach dem Hauptsatz der Integralrechnung dein gesuchtes Integral wie im Folgenden bestimmen:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Setze folglich deine Werte in die Gleichung ein und berechne so dein Integral.

$$\begin{aligned}\int_0^{1,5} f(x)\mathrm{d}x &= F(1,5) - F(0)\\ &= (1,5+1)\cdot\mathrm{e}^{-1,5} - (0+1)\cdot\mathrm{e}^{-0}\\ &= 2,5\cdot\mathrm{e}^{-1,5} - 1\cdot 1\\ &= 2,5\cdot\mathrm{e}^{-1,5} - 1\end{aligned}$$

Berechne den Wert dieses Terms wieder mit deinem Taschenrechner.

Es ergibt sich der folgende Wert:

$$2,5\cdot\mathrm{e}^{-1,5} - 1 \approx 0,56 - 1 = -0,44$$

Somit ergeben sich die beiden Integrale mit

$$\int_0^{1,5} f(x)\mathrm{d}x = -0,44$$
$$\int_0^{1,5} g(x)\mathrm{d}x = -2,95$$

Bestimme nun den Betrag der Differenz der beiden Integrale, der dann den gesuchten Flächeninhalt darstellt.

$$A = \left|\int_0^{1,5} g(x)\mathrm{d}x - \int_0^{1,5} f(x)\mathrm{d}x\right| = |-2,95 - (-0,44)| = |-2,51| = 2,51$$

Somit ergibt sich die Größe der Fläche, die für das Emblem vorgesehen ist mit $2,51$ FE.

e) ► **Gleichung der Parabel bestimmen** (4P)

►► **Lösungsweg A: Allgemeine Parabelgleichung**

Eine quadratische Parabel baut sich allgemein wie folgt auf:

$$p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

Der Graph dieser Parabel soll den selben Tiefpunkt und den selben y-Achsenschnittpunkt haben wie der Graph der Funktion f.

Diese hast du bereits bestimmt:

Tiefpunkt: $T(1 \mid f(1))$

y-Achsenschnittpunkt: $Y_f(0 \mid 0)$

Bestimme zunächst die y-Koordinate des Tiefpunktes vom Graphen von f.

$$f(1) = -1 \cdot \mathrm{e}^{-1} = -\frac{1}{\mathrm{e}} \approx -0,37$$

Verwende diese Punkte nun, um die Parameter a, b und c zu bestimmen.

Da du drei Parameter hast, brauchst du auch drei Bedingungen, die du aus deinen Punkten gewinnen kannst.

Über die Koordinaten erhältst du die folgenden:

$$p(0) = 0$$

$$p(1) = -0,37$$

Die 3. Bedingung erhältst du aus der Tatsache, dass T auch Tiefpunkt des Graphen von p sein soll.
Folglich gilt an dieser Stelle für die Funktion p:

$$p'(1) = 0$$

Bestimme nun mittels dieser Bedingungen deine Parameter. Leite dazu zunächst die Funktion p nach x ab.

$$p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

$$p'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$$

Verwende nun die Bedingungen:

$$\begin{aligned} p'(1) &= 0 \\ 2\cdot a\cdot 1 + b &= 0 \qquad \mid -2\cdot a \\ b &= -2\cdot a \end{aligned}$$

Setze diesen Wert für a in eine weitere Bedingung ein.

$$\begin{aligned} p(0) &= 0 \\ a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c &= 0 \\ c &= 0 \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für c der Wert $c = 0$ den du in jeder weitern Gleichung einsetzen kannst.

$$\begin{aligned} p(1) &= -0,37 \\ a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + 0 &= -0,37 \\ a\cdot 1^2 + (-2\cdot a)\cdot 1 &= -0,37 \\ a - 2\cdot a &= -0,37 \\ -a &= -0,37 \\ a &= 0,37 \end{aligned}$$

Damit hast du den Wert für a berechnet.
Da gilt $b = -2\cdot a$ ergibt sich für b:

$b = -2\cdot 0,37 = -0,74$

Eingesetzt in die Funktionsgleichung erhältst du den folgenden Funktionsterm der Funktion p.

$p(x) = 0,37\cdot x^2 - 0,74\cdot x$

►► Lösungsweg B: Scheitelpunktform

Du kennst bereits den Tiefpunkt des Graphen von f und auch den y-Achsenschnittpunkt.
Diese lauteten wie zuvor bestimmt

$Y_f(0 \mid 0)$ und $T(1 \mid f(1))$

Bestimme zunächst den Funktionswert von f an der Stelle $x = 1$.

Da der Scheitel S einer nach oben geöffneten Parabel gleichzeitig der Tiefpunkt ist, gilt:

$T = S$

Folglich kannst du die Scheitelpunktform verwenden, um die gesuchte Funktionsgleichung zu bestimmen. Diese lautet:

$p(x) = a\cdot(x - x_s)^2 + y_s$, wobei $(x_s \mid y_s)$ die Koordinaten des Scheitelpunktes sind.

Setze die Koordinaten von S und somit von T für x_s und y_s ein.
Mittels des y-Achsenschnittpunktes kannst du dann den Parameter a bestimmen.

Bestimme nun den Funktionswert von f an der Stelle $x = 1$

$f(1) = -1 \cdot \mathrm{e}^{-1} = -\frac{1}{\mathrm{e}} \approx -0,37$

Setze nun nun die Koordinaten von S mit $S(1 \mid -0,37)$ in die Scheitelpunktform ein.

$p(x) = a \cdot (x-1)^2 - 0,37$

Setze nun die Koordinaten des y-Achsenschnittpunktes mit $Y_f(0 \mid 0)$ in die Gleichung ein.

$$
\begin{aligned}
p(0) &= 0 \\
0 &= a \cdot (0-1)^2 - 0,37 \\
0 &= a \cdot (-1)^2 - 0,37 \\
0 &= a \cdot 1 - 0,37 \qquad \mid +037 \\
0,37 &= a
\end{aligned}
$$

Somit hast du auch den Parameter a bestimmt.

Eingesetzt ergibt sich die folgende Funktionsgleichung der Parabel, die du dann noch ausmultiplizieren kannst.

$p(x) = 0,37 \cdot (x-1)^2 - 0,37$

Ausmultipliziert ergibt sich die folgende Form.

$$
\begin{aligned}
p(x) &= 0,37 \cdot (x-1)^2 + 0,37 \\
&= 0,37 \cdot (x - 2 \cdot x + 1) - 0,37 \\
&= 0,37 \cdot x - 2 \cdot 0,37 \cdot x + 037 - 0,37 \\
&= 0,37 \cdot x - 0,74 \cdot x
\end{aligned}
$$

Somit erhältst du die Funktionsgleichung der Parabel mit

$p(x) = 0,37 \cdot x - 0,74 \cdot x$