Lehrer Herr M. besucht mit seiner Klasse einen Jahrmarkt. Abgesehen von vielen Verpflegungsständen, an denen Süßigkeiten und Getränke angeboten werden, bietet dieser auch Attraktionen wie Box-Autos und ein Riesenrad an.

a) ▶ **Wahrscheinlichkeiten berechnen** (4BE)

1. Ereignis

In der Klasse befinden sich 20 Kinder. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eines der vier Mädchen zu einer Gondel geschickt wird, beträgt zunächst $\frac{4}{20}$. Für das zweite Mädchen beträgt die Wahrscheinlichkeit noch $\frac{3}{19}$ usw.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die vier Mädchen gemeinsam in einer Gondel sitzen, beträgt also $\frac{4}{20} \cdot \frac{3}{19} \cdot \frac{2}{18} \cdot \frac{1}{17} \approx 0,0002$; dies entspricht einer Wahrscheinlichkeit von etwa $0,02\%$.

2. Ereignis

Wenn genau eines der vier Mädchen in der Gondel sitzt, so müssen die anderen drei Plätze von anderen Mädchen besetzt werden. Dabei gibt es **vier** Kombinationsmöglichkeiten. Sei a eines der vier Mädchen und b ein anderes Mädchen:

$S = \{abbb\,;\, babb\,;\, bbab\,;\, bbba\}$. Für die Wahrscheinlichkeit ergibt sich also $4 \cdot \frac{4}{20} \cdot \frac{16}{19} \cdot \frac{15}{18} \cdot \frac{14}{17} \approx 0,4623$.

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa $46,23\%$ sitzt genau ein Mädchen in der Gondel.

3. Ereignis

Wenn höchstens 2 der vier Mädchen in der Gondel sitzen, so können entweder: 0 Mädchen, 1 Mädchen oder 2 Mädchen in der Gondel sitzen. Für genau ein Mädchen hast du die Wahrscheinlichkeit bereits berechnet. Berechne sie noch für die anderen beiden Fälle.

Für genau Null Mädchen ergibt sich die Wahrscheinlichkeit von $\frac{16}{20} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{14}{18} \cdot \frac{13}{17} \approx 0,3756$.

Für genau zwei Mädchen gibt es wieder mehrere Kombinationsmöglichkeiten, nämlich genau $\binom{4}{2}$. Für die Wahrscheinlichkeit gilt dann $\binom{4}{2} \cdot \frac{4}{20} \cdot \frac{3}{19} \cdot \frac{16}{18} \cdot \frac{15}{17} \approx 0,1486$

Als Gesamtwahrscheinlichkeit ergibt sich also: $0,4623 + 0,3756 + 0,1486 = 0,9865$.

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $98,65\%$ sitzen höchstens 2 der Mädchen in der Gondel.

b) ▶ **Durchschnittliche Anzahl der Personen ermitteln** (4BE)

Gehe die Aufgabenstellung durch: 20 % der 5.000 Personen fahren auf **keinen Fall** mit dem Riesenrad. 30% der 5.000 Personen fahren auf **jeden Fall** mit dem Riesenrad. 40% der Personen fahren bei gutem Wetter mit, wobei das Wetter mit einer Wahrscheinlichkeit von 60% gut wird. Die restlichen 10% fahren nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 40% mit dem Riesenrad. Der Anteil der Personen, die mit dem Riesenrad fahren, beläuft sich also auf:

$0{,}3 + 0{,}4 \cdot 0{,}6 + 0{,}1 \cdot 0{,}4 = 0{,}58$

Daraus ergibt sich der Erwartungswert:

$\mu = 0{,}58 \cdot 5.000 = 2.900$

Am nächsten Tag werden erwartungsgemäß 2.900 Personen mit dem Riesenrad fahren.

▶ Wahrscheinlichkeit für gutes Wetter berechnen

Die Wahrscheinlichkeit für gutes Wetter lag eben bei 60%, nun wird sie zu einer Variablen, sagen wir zu a. Der Erwartungswert soll kleiner werden als 2.000, d.h.:

$$\begin{aligned} (0{,}3 + 0{,}4 \cdot a + 0{,}1 \cdot 0{,}4) \cdot 5.000 &< 2.000 \\ (0{,}34 + 0{,}4 \cdot a) \cdot 5.000 &< 2.000 \\ 1.700 + 2.000 \cdot a &< 2.000 \quad | \; -1.700 \\ 2.000 \cdot a &< 300 \quad | \; : 2.000 \\ a &< 0{,}15 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit für gutes Wetter muss kleiner als 15% sein, damit der Wert unterschritten wird.

c) **▶ Wahrscheinlichkeit für technischen Fehler berechnen** (4BE)

Bei den letzten 30 Durchläufen blieb das Riesenrad genau 3 Mal stehen, das führt zu einer Wahrscheinlichkeit von $p = \frac{3}{30} = 0,1$.

Sei in den folgenden Ereignissen Z die Anzahl der Durchläufe, in denen das Riesenrad stehen bleibt. Z ist binomialverteilt mit $p = 0,1$ und $n = 50$.

Zunächst ist die Wahrscheinlichkeit für $Z = 10$ gefragt:

$P(Z = 10) = \binom{50}{10} \cdot (0,1)^{10} \cdot (0,9)^{40} \approx 0,0152$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $1,52\%$ bleibt das Riesenrad bei 50 Durchläufen genau 10 Mal stehen.

Als nächstes ist die Wahrscheinlichkeit für $Z \leq 15$ gefragt. Lies sie in einer Tabelle zur Binomialverteilung für $n = 50$ und $p = 0,1$ ab.

$P(Z \leq 15) = 0,9999$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $99,99\%$ bleibt das Riesenrad bei 50 Durchläufen höchstens 15 Mal stehen.

Zuletzt ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $Z \geq 5$ gefragt:

$P(Z \geq 5) = 1 - P(Z \leq 4) = 1 - 0,4312 = 0,5688$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $56,88\%$ bleibt das Riesenrad bei 50 Durchgängen mindestens 5 Mal stehen.

d) **▶ Hypothesen formulieren** (4BE)

Der Ingenieur vertritt die Hypothese $H_0 : p_0 \leq 0,05$, während der Betreiber die Hypothese $H_1 : p_1 > 0,05$ vertritt.

▶ Entscheidungsregel ermitteln

Die Hypothese H_0 wird beibehalten, so lange das Riesenrad nicht zu oft stehen bleibt. Gesucht ist ein Wert k, für den gilt $P(Z > k) < 0,1$:

$$\begin{aligned} P(Z>k) &< 0,1 \\ 1-P(Z\leq k) &< 0,1 \qquad \mid -1 \\ -P(Z\leq k) &< -0,9 \qquad \mid \cdot(-1) \\ P(Z\leq k) &> 0,9 \end{aligned}$$

$P(Z\leq 7)=0,87204$, $P(Z\leq 8)=0,93691$. Damit ist $k=8$.

Wenn das Riesenrad bei 100 Durchläufen mehr als 8 Mal stehen bleibt, wird die Nullhypothese $H_0 : p_0 \leq 0,05$ abgelehnt.

e) ► **Fehlerwahrscheinlichkeit berechnen** (4BE)

Die Nullhypothese wird angenommen, so lange das Riesenrad höchstens 8 Mal stehen bleibt. Das Riesenrad bleibt genau so oft stehen wie vorher, also immer noch bei 10% der Durchläufe. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Ingenieur sein Geld dennoch bekommt, ist gleich der Wahrscheinlichkeit, dass das Riesenrad bei 100 Durchläufen höchstens 7 Mal stehen bleibt. Sei Z wieder die Anzahl der Durchläufe, in denen das Riesenrad stehen bleibt, binomialverteilt mit $n=100$ und $p=0,1$.

$P(Z\leq 8)=0,3209$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $32,09\%$ erhält der Ingenieur sein Geld dennoch.

► **Begriffe erklären**

Mit dem **Fehler 1. Art** wird der Fehler bezeichnet, wenn die Nullhypothese **wahr ist**, aber **abgelehnt** wird.

Der **Fehler 2. Art** bezeichnet dementsprechend den Fehler, wenn die Nullhypothese **falsch ist**, aber dennoch **angenommen** wird.

In unserer letzten Rechnung wurde also die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art bestimmt.