a) ▶ **Wahrscheinlichkeiten berechnen** (8P)

Aus dem Aufgabentext geht hervor, dass 60 % aller Besucher ihre Eintrittskarten online gekauft haben. Das heißt auch: Ein zufällig ausgewählter Besucher kauft seine Eintrittskarten mit einer Wahrscheinlichkeit von 60 % online.

Ereignis A

Es werden zwei Besucher interviewt. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide ihre Karten online gekauft haben. Du kannst die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ über die **Pfadregel** ermitteln:

$$P(A) = 0,6 \cdot 0,6 = 0,36$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 36 % haben beide interviewte Besucher ihre Eintrittskarten online gekauft.

Ereignis B

Nun werden 10 Besucher interviewt. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Hälfte, also genau 5 der 10 interviewten Besucher, ihre Eintrittskarten online gekauft haben.

Sei X die Zufallsgröße, welche die Anzahl der interviewten Besucher beschreibt, die ihre Karten online gekauft haben. X kann als **binomialverteilt** angenommen werden mit $n = 10$ und $p = 0,6$, denn

- es wird nur zwischen zwei Merkmalsausprägungen entschieden: „online gekauft“ oder „nicht online gekauft“,
- es wird davon ausgegangen, dass jeder interviewte Besucher mit einer Wahrscheinlichkeit von 60 % seine Karten online gekauft hat.

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(X = 5)$:

$$\begin{aligned} P(B) = P(X=5) &= \binom{10}{5} \cdot 0,6^5 \cdot (1-0,6)^{10-5} \\ &= 252 \cdot 0,6^5 \cdot 0,4^5 \approx 0,20 \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 20 % haben genau die Hälfte von 10 interviewten Besuchern ihre Karten online gekauft.

Ereignis C

Wieder werden 10 Besucher interviewt. Die Anzahl der interviewten Besucher, die ihre Karten online gekauft haben, wird also wieder durch die Zufallsgröße X mit $n = 10$ und $p = 0,6$ beschrieben.

Dieses Mal ist die Wahrscheinlichkeit dafür gesucht, dass **mindestens neun** der 10 interviewten Besucher ihre Karten online gekauft haben, also entweder 9 oder 10. Dies ist die Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 9)$.

$$\begin{aligned} P(C) = P(X \geq 9) &= P(X=9) + P(X=10) \\ &= \binom{10}{9} \cdot 0,6^9 \cdot 0,4^1 + \binom{10}{10} \cdot 0,6^{10} \cdot 0,4^0 \\ &= 10 \cdot 0,6^9 \cdot 0,4 + 0,6^{10} \approx 0,046 \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 4,6 % haben mindestens 9 der 10 interviewten Besucher ihre Karten online gekauft.

b) ▸ **Anzahl der Besucher begründet entscheiden** (5P)

Du weißt aus dem Aufgabentext, dass

- 60 % der Besucher ihre Karten online gekauft haben,
- 25 % im Vorverkauf,
- der Rest, also 15 %, an der Abendkasse.

Die Frage ist nun: Wie viele Besucher müsste man mindestens interviewen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % wenigstens zwei Besucher zu finden, die ihre Karten an der Abendkasse gekauft haben.

Du kannst so vorgehen:

- Berechne zunächst für ein allgemeines, unbekanntes n, mit welcher Wahrscheinlichkeit mindestens 2 der n interviewten Besucher ihre Karten an der Abendkasse gekauft haben.
- Untersuche dann, ob diese Wahrscheinlichkeit für $n = 24$ mindestens 90 % beträgt oder kleiner ist.

1. Schritt: Wahrscheinlichkeit für allgemeines n berechnen

Sei Y die Anzahl der interviewten Besucher, die ihre Karten an der Abendkasse gekauft haben. Y kann mit der Begründung aus Aufgabenteil a) als binomialverteilt angenommen werden mit n unbekannt und $p = 0,15$.

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(Y \geq 2)$. Es bietet sich an, sie über die Wahrscheinlichkeit des **Gegenereignisses** zu berechnen:

$$\begin{aligned}
P(Y \geq 2) &= 1 - P(Y \leq 1)\\
&= 1 - (P(Y=0) + P(Y=1))\\
&= 1 - \left(\binom{n}{0} \cdot 0,15^0 \cdot 0,85^n + \binom{n}{1} \cdot 0,15^1 \cdot 0,85^{n-1}\right) && \binom{n}{0} = 1,\ \binom{n}{1} = n,\ a^0 = 1 \text{ (für } a \neq 0)\\
&= 1 - \left(1 \cdot 1 \cdot 0,85^n + n \cdot 0,15 \cdot 0,85^{n-1}\right)\\
&= 1 - 0,85^n - n \cdot 0,15 \cdot 0,85^{n-1}
\end{aligned}$$

Du weißt also: Die Wahrscheinlichkeit, dass von n interviewten Besuchern mindestens zwei ihre Karten an der Abendkasse gekauft haben, beträgt $1 - 0,85^n - n \cdot 0,15 \cdot 0,85^{n-1}$.

2. Schritt: $n = 24$ einsetzen und berechnen

Gesucht ist die Anzahl der zu interviewenden Besucher n so, dass die Wahrscheinlichkeit $P(Y \geq 2)$ mindestens den Wert 0,9 annimmt. Es soll untersucht werden, ob es hierzu genügt, 24 Besucher zu interviewen. Setze also $n = 24$ in den Term ein, den du eben bestimmt hast. Wenn sich eine Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % ergibt, so reichen 24 Besucher aus, wenn nicht, dann müssen es mehr sein.

$$\begin{aligned}
P(Y \geq 2) &= 1 - 0,85^{24} - 24 \cdot 0,15 \cdot 0,85^{24-1}\\
&= 1 - 0,85^{24} - 24 \cdot 0,15 \cdot 0,85^{23} \approx 0,8941
\end{aligned}$$

Bei 24 interviewten Besuchern beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zwei ihre Karten an der Abendkasse gekauft haben, etwa 89,41 %. Dies ist **weniger** als 90 %. Es genügt also nicht, 24 Besucher zu interviewen.

c) ▶ **Sachverhalt geeignet darstellen** (7P)

Aus der Aufgabenstellung zu Beginn weißt du, dass 60 % aller Besucher ihre Karten online gekauft haben, also haben 40 % aller Besucher ihre Karten nicht online gekauft.

Nun ist zusätzlich bekannt, dass 35 % aller Besucher Frauen waren, also waren 65 % der Besucher keine Frauen.

Weiterhin weißt du, dass 45 % der Besucher, die ihre Karten online gekauft haben, Frauen waren. Also waren 55 % der Besucher, die ihre Karten online gekauft haben, keine Frauen.

Diesen Sachverhalt sollst du nun z.B. in einer Vierfeldertafel oder in einem Baumdiagramm darstellen. Wir bieten beide Darstellungsformen an, die Vierfeldertafel (Lösungsweg A) und das Baumdiagramm (Lösungsweg B).

▶▶ **Lösungsweg A: Vierfeldertafel**

Wir wollen zunächst einige Ereignisse definieren:

- Sei F das Ereignis „Ein Besucher ist eine Frau“ und $\overline{F}$ das zugehörige Gegenereignis.
- Sei weiterhin O das Ereignis „Ein Besucher hat seine Karte online gekauft“ und auch hier $\overline{O}$ das zugehörige Gegenereignis.

Du weißt, dass 45 % aller Besucher, die ihre Karte online gekauft haben, Frauen waren. 60 % aller Besucher haben ihre Karte online gekauft. Mit der Pfadregel folgt also:

$0,45 \cdot 0,6 = 0,27$

und somit: 27 % aller Besucher waren Frauen und haben ihre Karte online gekauft.

Trage die Informationen aus der Aufgabenstellung zunächst in die Vierfeldertafel ein:

	F	$\overline{F}$	$\sum$
O	0,27		0,6
$\overline{O}$			0,4
$\sum$	0,35	0,65	1

Die Einträge der inneren vier Felder müssen in ihrer Summe den Eintrag am Rand ergeben und zwar sowohl zeilen- als auch spaltenweise. So kannst du die übrigen Einträge der Vierfeldertafel berechnen:

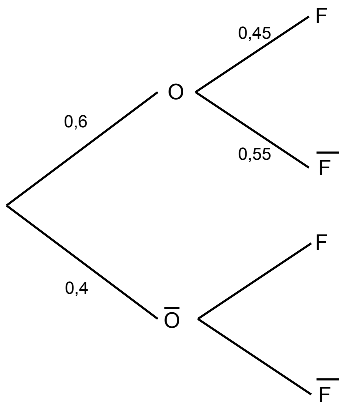
	F	$\overline{F}$	$\sum$
O	0,27	**0,33**	0,6
$\overline{O}$	**0,08**	**0,32**	0,4
$\sum$	0,35	0,65	1

▶▶ Lösungsweg B: Baumdiagramm

Auch hier:

- Sei F das Ereignis „Ein Besucher ist eine Frau" und $\overline{F}$ das zugehörige Gegenereignis.
- Sei weiterhin O das Ereignis „Ein Besucher hat seine Karte online gekauft" und auch hier $\overline{O}$ das zugehörige Gegenereignis.

Mit den Angaben aus der Aufgabenstellung folgt das Baumdiagramm:



▶ Wahrscheinlichkeit dafür berechnen, dass die Frau die Karte online gekauft hat

Du weißt, dass es sich bei der interviewten Person um eine Frau handelt. Diese Information ist vorausgesetzt. Gefragt ist nun nach der Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Frau ihre Karte online gekauft hat.

Du kannst dies auch anders formulieren: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person ihre Karte online gekauft hat, **unter der Bedingung**, dass diese Person eine Frau ist. Es handelt sich hier also um eine **bedingte Wahrscheinlichkeit**. Die Bedingung ist dabei das Ereignis F.

In Formeln kannst du die gesuchte Wahrscheinlichkeit also so ausdrücken:

$P_F(O)$.

Du kannst sie über die Formel zur bedingten Wahrscheinlichkeit berechnen. Die benötigten Wahrscheinlichkeiten erhältst du entweder mithilfe der Pfadregel aus dem Baumdiagramm oder aus der Vierfeldertafel.

$$\begin{aligned} P_F(O) &= \frac{P(F\cap O)}{P(F)} \\ &= \frac{P(O\cap F)}{P(F)} \\ &= \frac{0,6\cdot 0,45}{0,35} \\ &= \frac{0,27}{0,35} \approx 0,7714 \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 77,14 % hat die Frau ihre Karte online gekauft.

d) ▸ **Wahrscheinlichkeit für höchstens 2.000 Besucher ermitteln** (5P)

Vor der letzten Zugabe saßen im mittleren Rang 2.200 Personen. Nun verlassen vor der letzten Zugabe unabhängig voneinander 10 % der Besucher das Stadion. Das heißt: Jeder der Besucher im mittleren Rang verlässt das Stadion vor der letzten Zugabe mit einer Wahrscheinlichkeit von 10 % bzw.: Jeder der Besucher im mittleren Rang bleibt mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % bis zur letzten Zugabe im Stadion.

Sei Z die Zufallsgröße, welche die Anzahl der Besucher im mittleren Rang bei der letzten Zugabe beschreibt. Auch hier kann Z als binomialverteilt angenommen werden mit $n = 2.200$ und $p = 0,9$, denn

- es wird nur zwischen zwei Merkmalsausprägungen unterschieden, nämlich: „Besucher geht“ oder „Besucher bleibt“,
- jeder der Besucher bleibt bis zur letzten Zugabe mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 %.

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei der letzten Zugabe noch höchstens 2.000 Besucher im mittleren Rang sitzen. Dies ist die Wahrscheinlichkeit $P(Z \leq 2.000)$. Du kannst bei der Berechnung so vorgehen:

- Aufgrund des großen Stichprobenumfangs kann Z durch eine normalverteilte Zufallsgröße angenähert werden, allerdings nur, wenn gilt: $\sigma > 3$. Berechne also den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von Z und untersuche, ob das Kriterium erfüllt ist.
- Berechne die Wahrscheinlichkeit $P(Z \leq 2.000)$ näherungsweise über die Normalverteilung. Die benötigten Wahrscheinlichkeiten kannst du einer Tabelle zur Normalverteilung entnehmen.

1. Schritt: Erwartungswert und Standardabweichung berechnen

Für den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ einer binomialverteilten Zufallsgröße gilt:

$$\begin{aligned} \mu &= n \cdot p \\ &= 2.200 \cdot 0,9 = 1.980 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \sigma &= \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \\ &= \sqrt{2.200 \cdot 0,9 \cdot 0,1} = \sqrt{198} \approx 14,07 \end{aligned}$$

Da $\sigma = 14,07 > 3$ ist, ist eine Annäherung der Binomialverteilung durch die Normalverteilung zulässig. Z kann also durch eine normalverteilte Zufallsgröße mit $\mu = 1.980$ und $\sigma = 14,07$ angenähert werden.

2. Schritt: Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 2.000)$ berechnen

Berechne die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 2.000)$ über die Normalverteilung. Da diese hier als Annäherung der Binomialverteilung genutzt wird, musst du die **Stetigkeitskorrektur** von 0,5 berücksichtigen, um ein möglichst genaues Ergebnis zu erhalten.

$$\begin{aligned} P(X \leq 2.000) &= \Phi\left(\frac{k-\mu+0,5}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{2.000-1.980+0,5}{14,07}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{20,5}{14,07}\right) \\ &= \Phi(1,457) \end{aligned}$$

In einer Tabelle zur Standardnormalverteilung findest du:

$\Phi(1,46) = 0,9279$.

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 92,79 % sitzen bei der letzten Zugabe noch höchstens 2.000 Besucher im mittleren Rang.

e) ▸ **Wahrscheinlichkeit für weniger als zwei Gewinner berechnen** (5P)

Insgesamt gibt es 30 rote und 30 blaue Eintrittskarten. Am Ende kommen insgesamt 4 Personen auf die Bühne. Es kann also sein, dass

- alle vier Karten derselben Farbe haben,
- 3 von ihnen Karten derselben Farbe haben,
- je zwei von ihnen Karten derselben Farbe haben.

Nun soll mit einem sechsseitigen Laplace-Würfel ausgelost werden, welche Farbe Freikarten gewinnt. Dabei sind zwei Seiten blau und vier Seiten rot. Die Wahrscheinlichkeit, dass Blau Freikarten gewinnt, liegt also bei $\frac{1}{3}$, während Rot mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$ Freikarten gewinnt.

Gesucht ist nun die Wahrscheinlichkeit dafür, dass weniger als zwei Besitzer farbiger Karten je eine Freikarte gewinnen. Weniger als zwei heißt keiner oder genau einer. Folgende Szenarien kommen dafür in Frage:

E_1: Alle Personen auf der Bühne haben blaue Karten und Rot gewinnt die Freikarten.

E_2: Alle Personen auf der Bühne haben rote Karten und Blau gewinnt die Freikarten.

E_3: Drei Personen haben blaue Karten und Rot gewinnt die Freikarten.

E_4: Drei Personen haben rote Karten und Blau gewinnt die Freikarten.

Berechne die Wahrscheinlichkeit der vier Ereignisse und addiere sie. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle vier bzw. drei der Besitzer farbiger Karten Karten einer Farbe haben, kannst du dabei über die **hypergeometrische Verteilung** berechnen.

1. Schritt: Wahrscheinlichkeit für E_1 berechnen

Insgesamt sind 60 farbige Karten verfügbar, von denen 30 rot und 30 blau sind. Vier dieser Karten wurden gezogen. Das Ereignis „Alle vier Besitzer farbiger Karten haben blaue Karten“ tritt ein, wenn alle vier Karten aus den 30 blauen Karten gezogen wurden. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist gerade:

$$P(\text{„Alle vier Karten sind blau“}) = \frac{\binom{30}{4}\cdot\binom{30}{0}}{\binom{60}{4}} = \frac{63}{1.121} \approx 0,0562$$

Blau gewinnt mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$. Nach der Pfadregel folgt also:

$$P(E_1) = \frac{1}{3}\cdot 0,0562 \approx 0,0187$$

2. Schritt: Wahrscheinlichkeit für E_2 berechnen

Das Ereignis „Alle vier Besitzer farbiger Karten haben rote Karten“ tritt ein, wenn alle vier Karten aus den 30 roten Karten gezogen wurden:

$$P(\text{„Alle vier Karten sind rot“}) = \frac{\binom{30}{0}\cdot\binom{30}{4}}{\binom{60}{4}} = \frac{63}{1.121} \approx 0,0562$$

Rot gewinnt mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$. Nach der Pfadregel folgt also:

$$P(E_2) = \frac{2}{3}\cdot 0,0562 \approx 0,0375$$

3. Schritt: Wahrscheinlichkeit für E_3 berechnen

Das Ereignis „Drei der vier Besitzer farbiger Karten haben blaue Karten“ tritt ein, wenn drei Karten aus den 30 blauen und eine Karte aus den 30 roten Karten gezogen wurden:

$$P(\text{„Drei der vier Karten sind blau“}) = \frac{\binom{30}{3}\cdot\binom{30}{1}}{\binom{60}{4}} = \frac{280}{1.121} \approx 0,25$$

Blau gewinnt mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$. Nach der Pfadregel folgt also:

$$P(E_3) = \frac{1}{3}\cdot 0,25 \approx 0,0833$$

4. Schritt: Wahrscheinlichkeit für E_4 berechnen

Das Ereignis „Drei der vier Besitzer farbiger Karten haben rote Karten“ tritt ein, wenn drei Karten aus den 30 roten und eine Karte aus den 30 blauen Karten gezogen wurden:

$$P(\text{„Drei der vier Karten sind rot“}) = \frac{\binom{30}{1}\cdot\binom{30}{3}}{\binom{60}{4}} = \frac{280}{1.121} \approx 0,25$$

Rot gewinnt mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$. Nach der Pfadregel folgt also:

$$P(E_4) = \frac{2}{3}\cdot 0,25 \approx 0,1667$$

Addiere nun die vier Wahrscheinlichkeiten. So erhältst du die Wahrscheinlichkeit dafür, dass weniger als zwei Besitzer farbiger Karten je eine Freikarte für das nächste Konzert erhalten.

$$\begin{aligned} P(\text{weniger als zwei erhalten Freikarte}) &= P(E_1)+P(E_2)+P(E_3)+P(E_4) \\ &= 0,0187+0,0375+0,0833+0,1667 \\ &= 0,3062 \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 30,62 % erhalten weniger als zwei Besitzer farbiger Karten je eine Freikarte für das nächste Konzert.