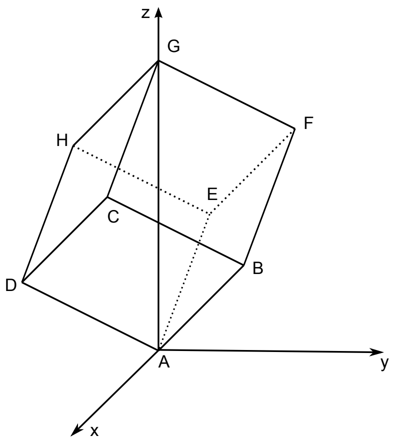
2.1 ► Kantenlänge ermitteln



Die Kanten eines Würfels sind alle gleich lang.

Du hast die Punkte B, D und F gegeben, wobei B und F über eine Kante des Würfels verbunden sind.

Um die Kantenlänge des Würfels zu berechnen, verwendest Du zuerst den Vektor $\overrightarrow{BF}$ und danach den Betrag des Vektors.

1. Schritt: Berechnen des Vektors $\overrightarrow{BF}$

$$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OB}$$

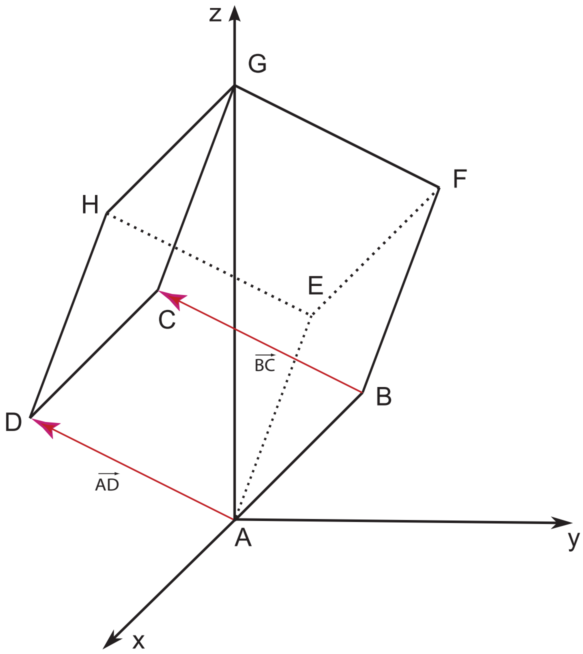
$$\overrightarrow{BF} = \begin{pmatrix} -2,86 \\ 4,95 \\ 8,08 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2,86 \\ 4,95 \\ 4,04 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,86 & - & 2,86 \\ 4,95 & - & 4,95 \\ 8,08 & - & 4,04 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5,72 \\ 0 \\ 4,04 \end{pmatrix}$$

2. Schritt: Betrag des Vektors $\overrightarrow{BF}$

$$\left|\overrightarrow{BF}\right| = \left|\begin{pmatrix} -5,72 \\ 0 \\ 4,04 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-5,72)^2 + 0^2 + 4,04^2} = 7,00$$

Die Kantenlänge des Würfels beträgt $7,00\,\text{m}$.

► Koordinaten des Punktes C nachweisen



Die Kanten eines Würfels sind alle gleich lang, deshalb gilt: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$
Die Koordinaten von C sind unbekannt, aber der Vektor $\overrightarrow{BC}$ hat die gleiche Richtung wie $\overrightarrow{AD}$.
Der Vektor $\overrightarrow{AD}$ beschreibt lediglich die Länge, ist also unabhängig, somit kannst du eine Vektorkette aus $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD}$ bilden.

$$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 2,86 \\ 4,95 \\ 4,04 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2,86 \\ -4,95 \\ 4,04 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,86 & + & 2,86 \\ 4,95 & + & (-4,95) \\ 4,04 & + & 4,04 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,72 \\ 0,00 \\ 8,08 \end{pmatrix}$$

Damit hast du die Koordinaten für $C(5,72 \mid 0,00 \mid 8,08)$ nachgewiesen.

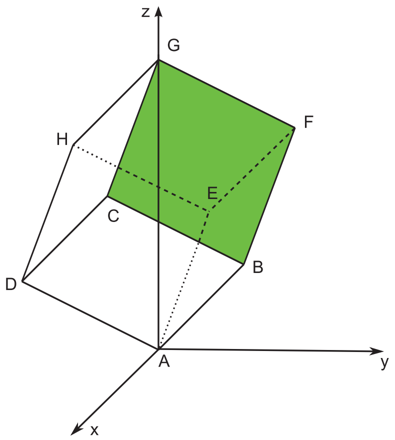
2.2 **► Abstand berechnen**

Der höchste Punkt des Würfels ist der Punkt G, welcher auf der z-Achse des Koordinatensystems liegt.
Die Koordinaten von G sind unbekannt, aber der Vektor $\overrightarrow{FG}$ hat die gleiche Richtung wie $\overrightarrow{AD}$, somit kannst du eine Vektorkette aus $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{AD}$ bilden.

$$\overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} -2,86 \\ 4,95 \\ 8,08 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2,86 \\ -4,95 \\ 4,04 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,86 & + & 2,86 \\ 4,95 & + & (-4,95) \\ 8,08 & + & 4,04 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,00 \\ 0,00 \\ 12,12 \end{pmatrix}$$

Die z-Koordinate des Punktes G ist ausschlaggebend für die Höhe des Würfels.
Der Abstand des höchsten Punktes des würfelförmigen Baukörpers zum Boden (x-y-Koordinatenebene) beträgt $12,12\,\text{m}$.

2.3 ▶ Ebenengleichung aufstellen und Winkel berechnen



Um diese Aufgabe zu lösen, musst du zuerst eine Ebenengleichung aufstellen und danach den Neigungswinkel der Ebene berechnen.

1. Schritt: Ebenengleichung aufstellen

Um eine Ebenengleichung aufstellen zu können brauchst du 3 Punkte auf der zu bildenden Ebene.

Wähle einen Ortsvektor aus, von dem du 2 Richtungsvektoren aufspannst.

Du hast die Punkte B, C, F und G gegeben oder in den vorherigen Teilaufgaben berechnet. Alle 4 Punkte sollen auf der Ebene liegen.

Die Ebenengleichung sieht dann wie folgt aus:

$E_{BFCG} = \vec{x} = \overrightarrow{OB} + r \cdot \overrightarrow{BC} + s \cdot \overrightarrow{BF}$

$$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 2,86 \\ 4,95 \\ 4,04 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = \vec{C} - \vec{B} = \begin{pmatrix} 5,72 \\ 0,00 \\ 8,08 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2,86 \\ 4,95 \\ 4,04 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,72 & - & 2,86 \\ 0,00 & - & 4,95 \\ 8,08 & - & 4,04 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,86 \\ -4,95 \\ 4,04 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BF} = \vec{F} - \vec{B} = \begin{pmatrix} -2,86 \\ 4,95 \\ 8,08 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2,86 \\ 4,95 \\ 4,04 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,86 & - & 2,86 \\ 4,95 & - & 4,95 \\ 8,08 & - & 4,04 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5,72 \\ 0,00 \\ 4,04 \end{pmatrix}$$

$$E_{BFCG} = \vec{x} = \begin{pmatrix} 2,86 \\ 4,95 \\ 4,04 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2,86 \\ -4,95 \\ 4,04 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5,72 \\ 0,00 \\ 4,04 \end{pmatrix}$$

2. Schritt: Neigungswinkel berechnen

Du sollst nun den Neigungswinkel zwischen der Ebene $BFCG$ und der Ebene $x_3 = 0$ (also der Horizontalebene) berechnen.

Den Winkel zwischen zwei Ebenen berechnest du mit der Formel $cos\alpha = \dfrac{|\vec{n_1} \circ \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|}$

Ein Normalenvektor steht orthogonal zur Ebene und lässt sich mit dem Kreuzprodukt berechnen.

$$\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} 2,86 \\ -4,95 \\ 4,04 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5,72 \\ 0,00 \\ 4,04 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} -4,95 \cdot 4,04 & - & 4,04 \cdot 0 \\ 4,04 \cdot (-5,72) & - & 2,86 \cdot 4,04 \\ 2,86 \cdot 0 & - & (-4,95) \cdot (-5,72) \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} -20,00 \\ -34,66 \\ -28,31 \end{pmatrix}$$

Den Normalenvektor der Ebene $x_3 = 0$ kannst du aus der Ebenengleichung ablesen.

$$\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Jetzt berechnest du noch den Betrag des jeweiligen Normalenvektors:

$$\left|\overrightarrow{n_1}\right| = \sqrt{(-20,00)^2 + (-34,66)^2 + (-28,31)^2}$$
$$\left|\overrightarrow{n_1}\right| \approx 49,02$$

$$\left|\overrightarrow{n_2}\right| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}$$
$$\left|\overrightarrow{n_2}\right| = 1$$

Nun kannst du die Formel anwenden:

$$cos\alpha = \frac{|(-20,00) \cdot 0 + (-34,66) \cdot 0 + (-28,31) \cdot 1|}{49,02 \cdot 1}$$
$$cos\alpha = \frac{|-28,31|}{49,02}$$
$$\alpha = 54,7^\circ$$

Der Neigungswinkel der Ebene beträgt $54,7^\circ$. Solarkollektoren die parallel zur Seitenfläche $BCFG$ angebracht werden haben keinen hohen Wirkungsgrad, da der Neigungswinkel größer als 50° ist.

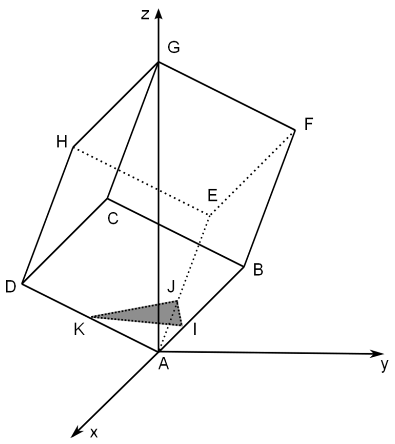
2.4 ▶ **Ebenengleichung, Koordinaten eines Punktes und Volumen berechnen**

1. Schritt: Ebenengleichung aufstellen

Die Ebene W liegt im würfelförmigen Baukörper. Die Punkte I, J und K liegen auf der Ebene.

Du weißt, dass die Ebene parallel zur x-y-Koordinatenebene verläuft, somit geben dir die z-Koordinaten der Punkte I und J Auskunft über die Ebenengleichung.

$W : z = 2,42$



2. Schritt: Koordinaten des Punktes K nachweisen

Der Punkt K liegt auf der Ebene, somit muss die z-Koordinate $2,42$ betragen.

Des Weiteren liegt der Punkt K auf der Kante $\overline{AD}$, also müssen seine Koordinaten die folgende Gleichung erfüllen:

$$g_{AD}: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2,86 \\ -4,95 \\ 4,04 \end{pmatrix}$$

Um zu überprüfen ob K auf der Kante $\overline{AD}$ liegt, setzt du die Koordinaten in die Gleichung ein:

$$\begin{aligned} 1,71 &= 2,86t && \Rightarrow t_1 = 0,60 \\ -2,97 &= -4,95t && \Rightarrow t_2 = 0,60 \\ 2,42 &= 4,04 && \Rightarrow t_3 = 0,60 \end{aligned}$$

Da $t_1 = t_2 = t_3 = 0,60$, liegt K auf der Kante $\overline{AD}$, somit sind die Koordinaten des Punktes nachgewiesen.

3. Schritt: Anteil Volumen des Körpers $AIJK$ vom Gesamtvolumen berechnen

In der Aufgabe ist nach dem Anteil des Volumens des Körpers $AIJK$ am Gesamtvolumen des würfelförmigen Baukörpers gefragt.

Das Volumen eines Würfels berechnet sich aus Länge · Breite · Höhe. Da alle Seiten des Würfels gleich lang sind, gilt für das Volumen eines Würfels:

$V = a^3$

Hier in der Aufgabe ergibt sich also ein Volumen des würfelförmigen Baukörpers von:

$V_W = \overline{AD}^3$

$V_W = (7,00\text{m})^3$

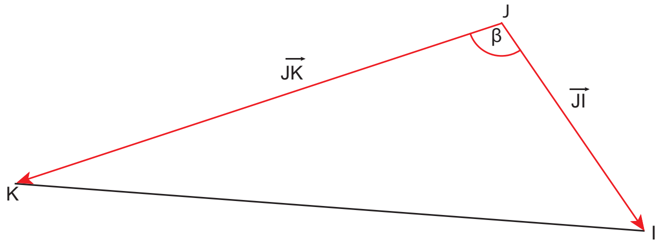
$V_W = 343,00\text{m}^3$

Den Körper $AIJK$ kann man mit einer Pyramide vergleichen und somit die Volumenformel $V_P = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h_P$ anwenden.

Es wird also die Grundfläche (hier Dreieck) und die Höhe der Pyramide gesucht.

Die Höhe der Pyramide beschreibt den Abstand zwischen der Ebene W und der x-y-Koordinatenebene und beträgt $h = 2,42$.

Die Grundfläche kann wie folgt berechnet werden:



Weg 1: Kreuzprodukt

$$A_G = \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{JK} \times \overrightarrow{JI} \right|$$

$$A_G = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 5,14 \\ -2,97 \\ 0,00 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5,14 \\ 2,97 \\ 0,00 \end{pmatrix} \right|$$

$$A_G = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -2,97 \cdot 0,00 & - & 0,00 \cdot 2,97 \\ 0,00 \cdot 5,14 & - & 5,14 \cdot 0,00 \\ 5,14 \cdot 2,97 & - & -2,97 \cdot 5,14 \end{pmatrix} \right|$$

$$A_G = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0,00 \\ 0,00 \\ 30,53 \end{pmatrix} \right|$$

$$A_G = \frac{1}{2}\sqrt{30,53^2}$$

$$A_G \approx 15,27$$

Weg 2: Sinussatz

$$A_G = \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{JK} \right| \cdot \left| \overrightarrow{JI} \right| \cdot \sin\beta$$

mit:

$$\overrightarrow{JK} = \begin{pmatrix} 5,14 \\ -2,97 \\ 0,00 \end{pmatrix}$$

$$\left| \overrightarrow{JK} \right| = \sqrt{5,14^2 + (-2,97)^2 + 0^2} = \sqrt{35,24} \approx 5,94$$

$$\overrightarrow{JI} = \begin{pmatrix} 5,14 \\ 2,97 \\ 0,00 \end{pmatrix}$$

$$\left| \overrightarrow{JI} \right| = \sqrt{5,14^2 + 2,97^2 + 0^2} = \sqrt{35,24} \approx 5,94$$

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{JK} \circ \overrightarrow{JI}}{\left| \overrightarrow{JK} \right| \cdot \left| \overrightarrow{JI} \right|}$$

$$\cos\beta = \frac{5,14^2 - 2,97^2 + 0^2}{\sqrt{35,24} \cdot \sqrt{35,24}}$$

$$\beta = 60,04^\circ$$

$$A_G = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{35,24}\sqrt{35,24} \cdot \sin 60,04^\circ$$

$$A_G \approx 15,27$$

Jetzt kannst du das Volumen der Pyramide vollständig berechnen:

$$V_P = \frac{1}{3} \cdot 15,27 \cdot 2,42$$

$V_P \approx 12,32$

Zum Schluss berechnest du den Anteil der Pyramide vom Würfel:

$\frac{V_W}{V_P} = \frac{12,32\text{m}^3}{343,00\text{m}^3}$

$\frac{V_W}{V_P} \approx 3,6\,\%$

Der Anteil des Volumens des Körpers $AIJK$ beträgt $3,6\,\%$ des Gesamtvolumens.

2.5 ▶ **Erwartungswert berechnen**

Du hast gegeben, dass es 80 Interessenten für ein Haus gibt, aber erfahrungsgemäß nur 5 % der Interessenten wirklich kaufen.

Es ist gefragt wie viele Käufer unter den 80 Interessenten zu erwarten ist, mit X=Anzahl der Käufer, n=Anzahl der Interessenten und P=Wahrscheinlichkeit eines Kaufes.

$E(X) = n \cdot p$

$E(X) = 80 \cdot 0,05$

$E(X) = 4$

Unter den 80 Interessenten sind 4 Käufer zu erwarten.

▶ **Wahrscheinlichkeiten berechnen**

Im zweiten Teil der Aufgabe ist nach der Wahrscheinlichkeit zweier Ereignisse gefragt.

Ereignis A: Mindestens drei dieser Interessenten kaufen ein derartiges Haus.

Die Zufallsvariable X kann als binomialverteilt angenommen werden:

- entweder ein Interessent kauft ein Haus oder nicht
- die Wahrscheinlichkeit von 5 % für ein Hauskauf bleibt unverändert
- die einzelnen Interessenten sind unabhängig voneinander

Die Parameter für die Binomialverteilung sind also $n = 80$ und $p = 5\,\%$.

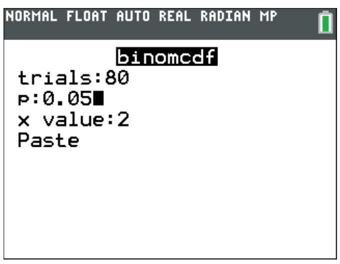
$P(A) = P(X \geq 3)$ ist gesucht. Der Taschenrechner kann so eine Form nicht auswerten. Du musst also das Gegenereignis formulieren.

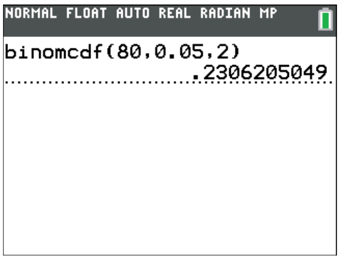
$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(\leq 2)$

Über die folgende Tastenkombination kannst du das Gegenereignis berechnen:

$\boxed{\texttt{2nd} \rightarrow \texttt{DISTR} \rightarrow \texttt{B:binomCdf(}}$

trials ist die Anzahl der Beobachtungen
p beschreibt die Wahrscheinlichkeit
x value beschreibt das Gegenereignis (≤2)





Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A beträgt: $P(A) = 1 - 0{,}2306 = 0{,}7694$. (76,94 %)

Ereignis B: Der zehnte dieser Interessenten ist der erste Käufer.
Das bedeutet die ersten 9 Interessenten sind keine Käufer.

$P(B) = 0{,}95 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}05$

$P(B) = 0{,}95^9 \cdot 0{,}05$

$P(B) = 0{,}0315$

Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B beträgt 3,15 %.

2.6 ► Binomialverteilung berechnen

Es ist gefragt wie viele Interessenten es geben muss, damit zu mehr als 90 % ein Käufer unter den Interessenten ist.

Rechnerisch formuliert würde das bedeuten: $P(X \geq 1) > 0{,}9$. Diese Form kann aber nicht ausgewertet werden, du musst also das Gegenereignis bilden.

$$\begin{aligned}
P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) &> 0{,}9 \\
1 - P(X = 0) &> 0{,}9 && \mid -1 \\
-P(X = 0) &> -0{,}1 && \mid \cdot(-1) \\
P(X = 0) &< 0{,}1
\end{aligned}$$

Das Gegenereignis kann als binomialverteilt angenommen werden:

- entweder ein Interessent kauft ein Haus oder nicht
- die Wahrscheinlichkeit von 5 % für ein Hauskauf bleibt unverändert
- die einzelnen Interessenten sind unabhängig voneinander

Die Parameter für die Binomialverteilung sind also $n =$ unbekannt und $p = 5\,\%$ und $X = k = 0$.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$\begin{aligned}
\binom{n}{0} \cdot 0{,}05^0 \cdot 0{,}95^{n-0} &< 0{,}1 \\
1 \cdot 1 \cdot 0{,}95^n &< 0{,}1 && \mid \ln() \\
n \cdot \ln(0{,}95) &< \ln(0{,}1) && \mid : \ln(0{,}95) \quad \text{Achtung: } \ln(0{,}95) < 0 \\
n &> \frac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}95)} \\
n &> 44{,}89
\end{aligned}$$

Es muss mindestens 45 Interessenten geben, damit zu mehr als 90 % ein Käufer dabei ist.