a) **▶ Ebenengleichung in Parameterform ermitteln** (5P)

Betrachte die Punkte $A(3\,|-1\,|\,2)$, $B(7\,|\,2\,|\,11)$ und $C(3\,|\,3\,|\,14)$.
Deine Aufgabe ist es, eine Ebenengleichung in Parameterform einer Ebene E aufzustellen, die die Punkte A, B und C beinhaltet.

Stelle die Gleichung der Ebene E in Parameterform auf, indem du von den Punkten $A(3\mid-1\mid2)$, $B(7\mid2\mid11)$ und $C(3\mid3\mid14)$ den Ortsvektor eines Punktes auswählst und diesen als Stützvektor verwendest. Wir wählen den Stützvektor $\overrightarrow{OA}$. Ausgehend von diesem ausgewählten Punkt kannst du zwei nicht kollineare Spannvektoren $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ bezüglich der anderen beiden Punkten ermitteln. In unserem Fall wären das zum Beispiel die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$.

Beachte, dass du für die Parametergleichung einer Ebene zwei Parameter, hier t und s, einführen musst.
Eine Parametergleichung der Ebene E mit $t, s \in \mathbb{R}$ lautet beispielsweise:

$$\boldsymbol{E: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{o} + s\cdot\overrightarrow{u} + t\cdot\overrightarrow{v}},$$

wobei $\overrightarrow{o}$ den Stützvektor sowie $\overrightarrow{u}$ und $\overrightarrow{v}$ die Spannvektoren darstellen.

1. Schritt: Bestimmen der Stütz- und Spannvektoren

Wähle zum Beispiel den Ortsvektor des Punktes $A(3\,|-1\,|\,2)$ als Stützvektor $\overrightarrow{OA}$. Dann gilt:

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ausgehend von diesem Punkt ermittelst du die beiden Spannvektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$, durch die die Ebene E aufgespannt wird.
Für den Richtungsvektor $\overrightarrow{AB}$ gilt dann:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Analog folgt dann für $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} = 4\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Hierbei kannst du den Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ anstelle von $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$ verwenden, da letzterer ein Vielfaches von $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist. Du darfst diese Umformung deshalb vornehmen, da es nicht relevant ist, welche Länge der Vektor $\overrightarrow{AC}$ hat. Entscheidend ist allein dessen Richtung, die bei jedem Vielfachen von $\overrightarrow{AC}$ gleich bleibt.

2. Schritt: Aufstellen der Parametergleichung für die Ebene *E*

Ausgehend von den aufgestellten Stütz- und Spannvektoren kannst du diese in die oben aufgestellte Parametergleichung für Ebenen einsetzen und hast somit eine Ebenengleichung in Parameterform für die Ebene E ermittelt mit:

$$E: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \text{für } s,\, t \in \mathbb{R}.$$

► Entwickeln einer Gleichung für die Ebene *E* in Normalenform

Ermittle nun eine Gleichung für die Ebene E in Normalenform.

Der Unterschied zwischen Normalenform und Parameterform liegt darin, dass bei der Parametergleichung die Ebene E durch Spannvektoren aufgespannt wird. Die Normalengleichung bestimmt dahingegen die Ebene E durch einen Normalenvektor $\overrightarrow{n}$, welcher senkrecht auf jedem Punkt der Ebene E steht.
Damit der Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ senkrecht auf jedem Punkt der Ebene steht, muss er folglich auch senkrecht auf den beiden Spannvektoren der Ebenengleichung der Ebene E in Parameterform stehen.

Lösungsweg A (Skalarprodukt):
Du kannst den Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ bestimmen, indem du die beiden Spannvektoren $\overrightarrow{u}$ und $\overrightarrow{v}$ aus dem ersten Abschnitt der Teilaufgabe verwendest und $\overrightarrow{n}$ so berechnest, dass

$$\boldsymbol{\overrightarrow{n} \circ \overrightarrow{u} = 0} \text{ und } \boldsymbol{\overrightarrow{n} \circ \overrightarrow{v} = 0}$$

gilt, denn zwei Vektoren stehen genau dann senkrecht aufeinander, wenn ihr Skalarprodukt gleich Null ist.
Aus diesen Bedingungen kannst du dann einen Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ ermitteln.

Lösungsweg B (Vektorprodukt):
Alternativ kannst du auch das Vektorprodukt zum Ermitteln des Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ verwenden. In diesem Fall gilt für den Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ folgende Beziehung:

$$\boldsymbol{\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}}$$

Beachte aber, dass du noch einen Stützvektor $\overrightarrow{o}$ benötigst.
Für die Ebenengleichung E in Normalenform gilt folgende Gleichung:

$$\boldsymbol{E: \left[\overrightarrow{x} - \overrightarrow{o}\right] \circ \overrightarrow{n}} = 0$$

1. Schritt: Ermitteln des Normalenvektors $\boldsymbol{\overrightarrow{n}}$

Verwende die Spannvektoren aus dem vorherigen Aufgabenteil mit

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

►► Lösungsweg A: Skalarprodukt

Für den Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ mit den drei Koordinaten n_1, n_2 und n_3 kannst du dann voraussetzen, dass einerseits

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 4 \cdot n_1 + 3 \cdot n_2 + 9 \cdot n_3 \stackrel{!}{=} 0$$

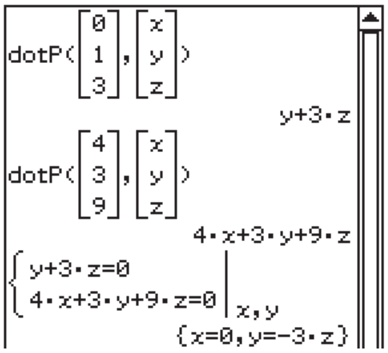
und andererseits

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0 \cdot n_1 + 1 \cdot n_2 + 3 \cdot n_3 = n_2 + 3 \cdot n_3 \stackrel{!}{=} 0 \text{ gelten soll.}$$

Daraus erhältst du ein unterbestimmtes lineares Gleichungssystem, welches du mittels CAS lösen kannst.

Das Skalarprodukt zweier Vektoren hat die Syntax `dotP(vektor1,verktor2)`. Berechne diese, bevor du mit Hilfe deines CAS das unterbestimmte Gleichungssystem aufstellst.

Wähle anschließend unter `Keyboard → 2D` den Befehl für ein Gleichungssystem aus.
Da das CAS keine unterbestimmte Gleichungssysteme direkt lösen kann, löst du es hier nach x und y. Setze anschließend $z = 1$, um einen möglichst einfachen Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ zu erhalten.



Damit erhältst du einen Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ mit:

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

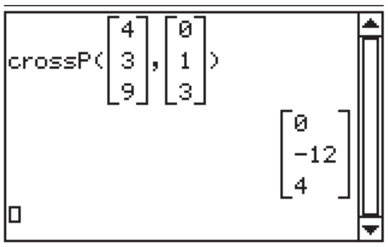
▶▶ Lösungsweg B: Vektorprodukt

Du kannst alternativ zur Ermittlung des Normalenvektors $\overrightarrow{n}$ auch das Vektorprodukt der beiden Spannvektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$, auf denen der Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ senkrecht stehen soll, verwenden.

Für das Vektorprodukt muss also gelten:

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}.$$

Dazu kannst du den Befehl `crossP()` für das Vektorprodukt verwenden. Die Syntax dieses Befehls lautet dabei:
`crossP(vektor1,vektor2)`.



Das CAS liefert dir den Normalenvektor mit:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

In diesem Fall ist die Länge des Vektors nicht relevant, sondern nur dessen Richtung.

2. Schritt: Aufstellen der Ebenengleichung der Ebene E in Normalenform

Wähle den Stützvektor $\overrightarrow{OA}$ und setze ihn in die zuvor aufgeführte Form der Ebenengleichung in Normalenform ein, dann erhältst du für die Ebenengleichung der Ebene E in Normalenform:

$$E: \left[\overrightarrow{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \circ \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

bzw.

$$E: \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \overrightarrow{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \overrightarrow{x} - (3 \cdot 0 + (-1) \cdot (-3) + 2 \cdot 1)$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \overrightarrow{x} - 5 = 0.$$

b) **▶ Nachweisen, dass A, B, C und D in einer Ebene liegen** (4P)

Gegeben sind die Punkte $A(3 \mid -1 \mid 2)$, $B(7 \mid 2 \mid 11)$, $C(3 \mid 3 \mid 14)$ und $D(-1 \mid 2 \mid 11)$.

In diesem Aufgabenteil sollst du überprüfen, ob die Punkte A, B, C und D in einer Ebene E liegen.

Da du bereits in Teilaufgabe a eine Ebenengleichung der Ebene E in Normalenform für die Ebene E aufgestellt hast, kannst du diese hier verwenden.
Du kannst natürlich auch die Ebenengleichung der Ebene E in Parameterform verwenden, musst aber bei dieser noch zusätzlich die entsprechenden Parameterwerte für t und s ermitteln, was mehr Aufwand entspricht.

Beachte: Die Ebene E ist die Ebene, in der die Puntke A, B und C liegen. Prüfe also, ob der Punkt D mit $D(-1 \mid 2 \mid 11)$ auf dieser Ebene liegt.
Die Ebenengleichung der Ebene E in Normalenform lautet wie folgt:

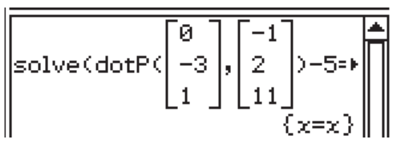
$$E: \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \overrightarrow{x} - 5 = 0.$$

Um zu zeigen, dass der Punkt D in der Ebene E liegt, kannst du eine Punktprobe durchführen. Setze dazu den Ortsvektor des Punktes $D(-1 \mid 2 \mid 11)$ in die Ebenengleichung in Normalenform der Ebene E für $\overrightarrow{x}$ ein und überprüfe, ob sich eine wahre Aussage ergibt.

Dazu kannst du den `solve`-Befehl auswählen und die obige Gleichung lösen.

Den Befehl `dotP` für das Skalarprodukt wendest du wieder wie oben an.

Trage die entsprechenden Werte in den `solve`-Befehl ein und bestätige mit `Enter`, um die Gleichung zu lösen.



Das CAS liefert dir die Aussage „`x=x`“. Das heißt, dass eine wahre Aussage vorliegt und damit auch, dass der eingesetzte Punkt in der Ebene E liegt.

Du hast also gezeigt, dass der Punkt $D(-1 \mid 2 \mid 11)$ zusammen mit den Punkten $A(3 \mid -1 \mid 2)$, $B(7 \mid 2 \mid 11)$ und $C(3 \mid 3 \mid 14)$ in einer Ebene E liegt.

▶ Nachweis, dass A, B, C, D Eckpunkte eines Drachenvierecks mit Symmetrieachse AC sind

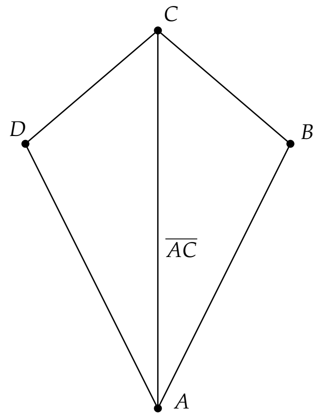
Betrachte wieder die Punkte $A(3 \mid -1 \mid 2)$, $B(7 \mid 2 \mid 11)$, $C(3 \mid 3 \mid 14)$ und $D(-1 \mid 2 \mid 11)$.

In diesem Aufgabenteil sollst du zeigen, dass die Punkte A, B, C und D die Eckpunkte eines Drachenvierecks sind, wobei die Gerade, die durch die Punkte A und C verläuft, die Symmetrieachse des Drachenvierecks darstellt.

Ein Drachenviereck ist dadurch definiert, dass eine Diagonale des Vierecks eine Symmetrieachse ist.

Sofern die Diagonale $\overline{AC}$ die Symmetrieachse ist, wie in der Aufgabenstellung gefordert wird, so muss für alle vier Seitenlängen gelten, dass immer je zwei gegenüberliegende Seitenlängen gleich lang sind.

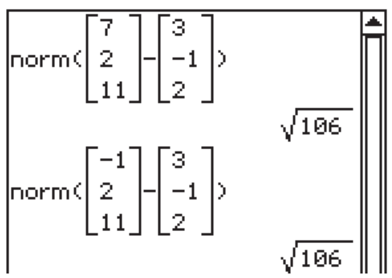
Insbesondere muss in diesem Fall gelten, dass $\left|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\right| = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{AD}}\right|$ und $\left|\overrightarrow{\boldsymbol{CD}}\right| = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{CB}}\right|$ erfüllt wird.



Ermittle also die Längen der Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CD}$ und $\overrightarrow{CB}$, indem du die Beträge der Vektoren berechnest und überprüfst, ob je zwei Seitenlängen gleichlang sind.

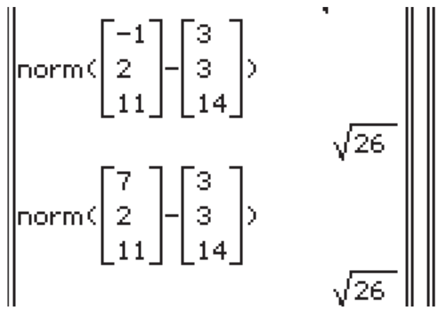
Verwende dazu den Befehl `norm()` und trage den Vektor ein, dessen Betrag berechnet werden soll.

Im Bild rechts werden die Beträge der Vektoren in folgender Reihenfolge berechnet:
$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CD}$ und $\overrightarrow{CB}$



Das liefert dir, dass $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AD}\right|$ und $\left|\overrightarrow{CD}\right| = \left|\overrightarrow{CB}\right|$ gilt.

Du hast also gezeigt, dass bezüglich $\overline{AC}$ als Symmetrieachse je die Längen zweier gegenüberliegenden Seiten gleich lang sind und damit, dass die Punkte $A(3 \mid -1 \mid 2)$, $B(7 \mid 2 \mid 11)$, $C(3 \mid 3 \mid 14)$ und $D(-1 \mid 2 \mid 11)$ die Eckpunkte eines Drachenvierecks sind.



c) ▶ **Bestimmen der Koordinaten für den Punkt A^*** (6P)

Betrachte das Drachenviereck mit den Eckpunkten $A(3 \mid -1 \mid 2)$, $B(7 \mid 2 \mid 11)$, $C(3 \mid 3 \mid 14)$ und $D(-1 \mid 2 \mid 11)$ aus dem Aufgabenteil zuvor.
Der Punkt A^* wird nun vom Punkt A aus auf der Symmetrieachse AC in Richtung des Punktes C verschoben. Dabei bildet A^* laut Aufgabenstellung mit den beiden Eckpunkten B und D ein gleichschenkliges Dreieck.
Hierbei sollst du die Koordinaten des Punktes A^* so bestimmen, dass das gleichschenklige Dreieck einen Basiswinkel α von $30\,^\circ$ hat.

Willst du die Koordinaten eines solchen Punktes A^* bestimmen, so ist es hilfreich, zuerst die allgemeinen Koordinaten des Punktes A^* anzugeben. Dieser befindet sich, wie du weißt, auf einer Geraden, die durch die Punkte A und C verläuft.
Stelle also zunächst die Geradengleichung g durch die Punkte A und C auf und setze diese Gleichung für die x-, y- und z-Koordinate des Punktes A^* ein.
Erinnerung: Eine Geradengleichung sieht folgendermaßen aus:

$\overrightarrow{g} = \overrightarrow{o} + t \cdot \overrightarrow{u}; t \in \mathbb{R},$

wobei $\overrightarrow{o}$ dem Ortsvektor und $\overrightarrow{u}$ dem Richtungsvektor entspricht.

Der Basiswinkel α ist derjenige Winkel, der von den Strecken $\overline{BA^*}$ und $\overline{BD}$ eingeschlossen wird. Da es sich um ein gleichschenkliges Dreieck handeln soll, kannst du natürlich auch die Strecken $\overline{DA^*}$ und $\overline{BD}$ betrachten. Wir behandeln die Aufgabenstellung aber anhand der erst genannten Stecken $\overline{BA^*}$ und $\overline{BD}$.

Allgemein gilt: Schließen zwei Vektoren $\overrightarrow{u}$ und $\overrightarrow{v}$ einen Winkel α ein, so gilt für diesen Winkel α:

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|}; 0 \leq \alpha \leq 180^\circ.$$

Soll nun die Bedingung erfüllt sein, dass die Strecken $\overline{BA^*}$ und $\overline{BD}$ einen Basiswinkel α von $30\,^\circ$ einschließen, so kannst du die Strecken $\overline{BA^*}$ und $\overline{BD}$ in die obige Gleichung einsetzen und überprüfen, für welche Werte der Winkel $\alpha = 30^\circ$ beträgt. Da die Strecke $\overline{BA^*}$ vom allgemein angegebenen Punkt A^* abhängt, erhältst du beim Lösen der Gleichung einen Wert für t, sodass des Basiswinkel $\alpha = 30\,^\circ$ beträgt.
Damit hast du außerdem die Koordinaten des gesuchten Punktes A^* ermittelt, da dieser vom Parameter t abhängt.

1. Schritt: Aufstellen einer Geradengleichung der Geraden g

Um die Gerade g aufzustellen, die durch die Punkte A und C verläuft, kannst du zuerst den Ortsvektor $\overrightarrow{o}$ aufstellen. Wähle beispielsweise $\overrightarrow{o} = \overrightarrow{OA}$ als Ortsvektor und $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AC}$ als Richtungsvektor.
Hierbei kannst du alternativ auch $\overrightarrow{OB}$ als Ortsvektor und $\overrightarrow{BA}$ als Richtungsvektor verwenden.
Damit erhältst du folgende Geradengleichung für die Gerade g:

$$\overrightarrow{g} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}.$$

2. Schritt: Allgemeine Koordinaten des Punktes A^* bestimmen

Da du bereits die Geradengleichung zur Geraden g durch die Punkte A und C aufgestellt hast, kannst du diese komponentenweise für die Koordinaten von A^* einsetzen und erhältst dadurch dessen allgemeine Koordinaten mit:

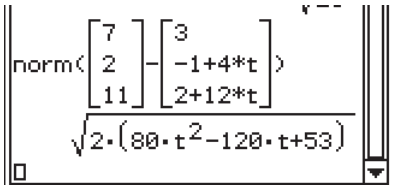
$A^*(3 \mid -1 + 4t \mid 2 + 12t).$

3. Schritt: Berechnen des Winkel α

Da die Aufgabenstellung verlangt, dass der Basiswinkel $\alpha = 30\,^\circ$ beträgt, kannst du die Strecken $\overline{BA^*}$ und $\overline{BD}$ in die oben aufgeführte Formel einsetzen und erhältst einen von t abhängigen Term.

Dazu benötigst du zunächst die Länge der Strecken $\overline{BA^*}$ und $\overline{BD}$.

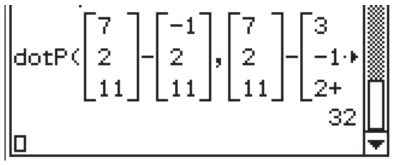
Verwende dazu wieder den Befehl für das Berechnen von Beträgen.
Diese kannst du mittels CAS berechnen und erhältst:
$|\ \overline{BD}\ | = 8$
und
$|\ \overline{BA^*}\ | = \sqrt{2\cdot(80t^2 - 120t + 53)}$.



Die Länge der Strecke $\overline{BA^*}$ enthält den Parameter t, da der Punkt A^* bereits von t abhängig war. Im Folgenden gilt es nun, für dieses t einen Wert zu bestimmen, sodass $\alpha = 30\,^\circ$ gilt.

Das Skalarprodukt der beiden Vektoren kannst du berechnen, indem du im CAS wieder den Befehl `dotP()` verwendest und über diesen das Skalarprodukt berechnest.

Das CAS liefert dir, dass das Skalarprodukt der Vektoren $\overrightarrow{BA^*}$ und $\overrightarrow{BD}$ 32 beträgt.



Setze die Angaben in die oben genannte Gleichung zur Berechnung der Größe des Basiswinkels $\alpha = 30\,^\circ$ und stelle sicher, dass das CAS auf Gradmaß eingestellt ist, denn sonst ist die folgende Gleichung nicht lösbar.

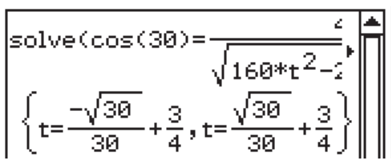
Die zu lösende Gleichung lautet:

$$\cos(30) = \frac{\overrightarrow{BD} \circ \overrightarrow{BA^*}}{|\ \overrightarrow{BD}\ | \cdot |\ \overrightarrow{BA^*}\ |} = \frac{32}{8\cdot\sqrt{2\cdot(80t^2 - 120t + 53)}}.$$

Eingabe in das CAS und Ausführen des `solve`-Befehls liefert dir zwei mögliche Werte für den Parameter t:

$$t_1 = -\frac{\sqrt{30}}{30} + \frac{3}{4} \text{ und } t_2 = \frac{\sqrt{30}}{30} + \frac{3}{4}.$$

Da du somit zwei Parameterwerte für t ermittelt hast, kannst du folglich auch zwei mögliche Orte für den gesuchten Punkt A^* angeben:

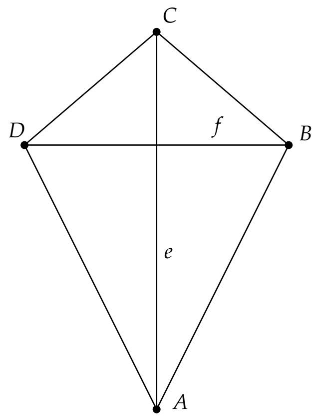


${A^*}_1(3 \mid 1{,}27 \mid 8{,}81)$ und
${A^*}_2(3 \mid 2{,}73 \mid 13{,}19)$.

Wir haben dabei t_1 für ${A^*}_1$ sowie t_2 für ${A^*}_2$ eingesetzt.

d) **▶ Bestimmen des Flächeninhalts A_D des Drachenvierecks $ABCD$** (7P)

Sei $ABCD$ das aus Teilaufgabe b betrachtete Drachenviereck mit den Eckpunkten $A(3 \mid -1 \mid 2)$, $B(7 \mid 2 \mid 11)$, $C(3 \mid 3 \mid 14)$ und $D(-1 \mid 2 \mid 11)$ und der Symmetrieachse $\overline{AC}$.



Bestimme in diesem Aufgabenteil den Flächeninhalt A_D des Drachenvierecks $ABCD$.
Der Flächeninhalt A_D eines solchen Drachenvierecks wird allgemein durch

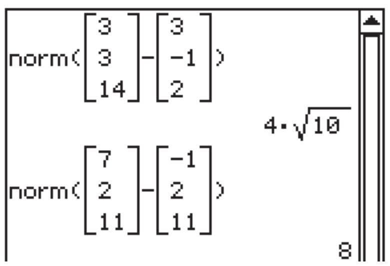
$\boldsymbol{A_D = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f}$

beschrieben, wobei e und f jeweils die Diagonalen zwischen den Eckpunkten darstellen.
Berechne die Längen der Diagonalen e und f und verwende schließlich diese Beziehung für den Flächeninhalt A_D des Drachenvierecks $ABCD$.

1. Schritt: Bestimmen der Längen der Diagonalen e und f

Die Diagonalen e bzw. f entsprechen jeweils der Strecke $\overline{AC}$ bzw. $\overline{DB}$. Das heißt, dass du zum Ermitteln der Längen von e und f lediglich die Längen der Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{DB}$ benötigst.

Diese kannst du ermitteln, indem du `norm()`-Befehl verwendest. Mit diesem kannst du die Beträge der hier behandelten Vektoren berechnen.



Damit hast du die Längen der Diagonalen ermittelt mit $e = 4 \cdot \sqrt{10}$ und $f = 8$.

2. Schritt: Berechnen des Flächeninhalts A_D

Da du im vorherigen Schritt die Längen der Diagonalen e und f ermittelt hast, kannst du diese in die Formel für den Flächeninhalt A_D einsetzen und erhältst:
$A_D = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{10} \cdot 8 = 16 \cdot \sqrt{10} \approx 50,6.$
Damit beträgt der Flächeninhalt A_D des Drachenvierecks $ABCD$ ungefähr 50,6 FE.

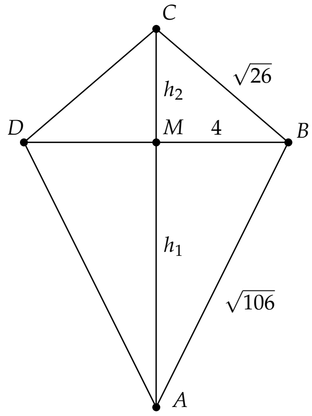
▶ Berechnen des Volumens V_K

Betrachte das Drachenviereck $ABCD$ mit den Eckpunkten $A(3 \mid -1 \mid 2)$, $B(7 \mid 2 \mid 11)$, $C(3 \mid 3 \mid 14)$ und $D(-1 \mid 2 \mid 11)$ und der Symmetrieachse $\overline{AC}$.
Das Drachenviereck soll nun um seine Symmetrieachse $\overline{AC}$ rotieren. Durch diese Rotation entsteht ein Doppelkegel.
Deine Aufgabe ist es, das Volumen V_K des entstandenen Doppelkegels K zu berechnen.

Um das Volumen V_K zu berechnen, kannst du zuerst den Doppelkegel K in zwei einzelne Kegel K_1 und K_2 aufteilen und deren Volumen V_{K1} bzw. V_{K2} separat berechnen. Für das Volumen V_K von K gilt dann folglich:

$\boldsymbol{V_K = V_{K1} + V_{K2}}.$

K_1 beschreibt hierbei den Kreiskegel, der durch die Rotation des Dreiecks ABD um die Symmetrieachse $\overline{AC}$ entsteht und K_2 denjenigen Kreiskegel, der durch Rotation von DBC entsteht.
Das heißt, der Rotationskörper besteht aus zwei **geraden** Kreiskegeln K_1 und K_2, da das Drachenviereck $ABCD$ an seiner Symmetrieachse $\overline{AC}$ gespiegelt werden kann, ohne dass sich eine der Seiten dabei verändert.
Daraus kannst du außerdem folgern, dass die Höhen h_1 und h_2 der beiden Kreiskegel K_1 und K_2 zusammen die Länge der Symmetrieachse $\overline{AC}$ ergeben. Berechne die Höhen h_1 und h_2, indem du diese Eigenschaft ausnutzt.



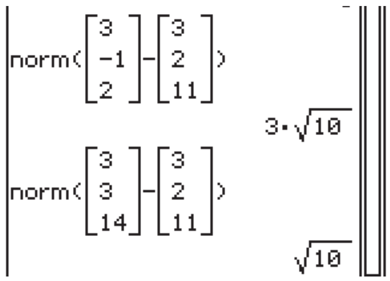
Ermittle anschließend die Volumina für jeden Kegel einzelnen mit folgender allgemeinen Formel für das Volumen von Kreiskegeln:
$\boldsymbol{V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h}$,
wobei r den Radius und h die Höhe des jeweiligen Kreiskegels beschreibt.
Sofern du die Volumina V_{K1} und V_{K2} der beiden Kreiskegel K_1 und K_2 ermittelt hast, addiere diese, um das Volumen V_K vom Doppelkreiskegel K zu erhalten.

1. Schritt: Ermitteln der Höhen h_1 und h_2

Zum Berechnen der Volumina der einzelnen Kreiskegel K_1 und K_2 benötigst du jeweils die Höhen h_1 und h_2 der Dreiecke.
Betrachte dazu zuerst den Kreiskegel K_1, der durch die Rotation des Dreiecks ABD um die Symmetrieachse $\overline{AC}$ entsteht. Die Höhe h_1 kannst du bestimmen, indem du den Abstand des Mittelpunktes M von der Strecke $\overline{DB}$ zum Punkt A ermittelst, denn dieser Abstand entspricht gerade der Höhe h_1, da es sich um einen geraden Kreiskegel handelt.
Der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{DB}$ hat den Ortsvektor

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Da die Höhe h_1 der Länge der Strecke $\overline{MA}$ entspricht, kannst du diese wie folgt berechnen:
Verwende erneut den Befehl für das Berechnen von Beträgen. Trage die Strecke $\overline{MA}$ entsprechend ein und bestätige mit `Enter`.



Damit hast du die Höhe h_1 des Kreiskegels K_1 mit $h_1 = 3 \cdot \sqrt{10}$ berechnet.

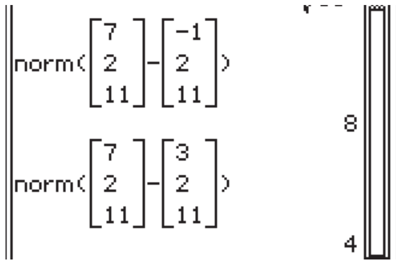
Verfahre analog mit der Höhe h_2 des Kreiskegels K_2, indem du die Strecke vom Mittelpunkt M zum Punkt C berechnest.

Damit hat der Kreiskegels K_2 die Höhe $h_2 = \sqrt{10}$.

Alternativ

Alternativ kannst du die Höhen h_1 und h_2 auch berechnen, indem du den Satz des Pythagoras verwendest, wobei du die Gleichung, die aus dem Satz des Pythagoras folgt, noch nach der gesuchten Höhe h_1 bzw. h_2 umstellen musst.

Beachte aber, dass du beim Verwenden des Satzes des Pythagoras die Länge der Strecke $\overline{MB}$ oder $\overline{MD}$ betrachten musst, wobei aufgrund der Symmetrie $|\overline{MB}| = |\overline{MD}|$ gilt.
Berechne zum Beispiel die Länge der Strecke $\overline{MB}$, indem den Befehl für das Berechnen von Beträgen wie oben verwendest. Trage dazu die Strecke $\overline{MB}$ ein und Bestätige mit `Enter`.

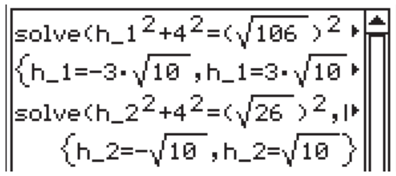


Das CAS liefert dir, dass $|\ \overline{MB}\ | = 4$ gilt.

Da du bereits die Längen der Strecken $\overline{CB}$ und $\overline{AB}$ in einer vorigen Teilaufgabe berechnet hast, kannst du für h_1 und h_2 folgende Gleichungen aufstellen, welche du mittels CAS nach h_1 bzw. h_2 auflösen kannst.

Die Gleichungen lauten dann wie folgt:

- $h_1{}^2 + |\ \overline{MB}\ |^2 = |\ \overline{AB}\ |^2$.
- $h_2{}^2 + |\ \overline{MB}\ |^2 = |\ \overline{CB}\ |^2$.



Das CAS gibt dir für jede Höhe zwei mögliche Werte aus. Für uns ist aber nur jeweils der positive Wert von Interesse, da eine negative Höhe offensichtlich nicht sinnvoll wäre.

Du kannst die Höhen folglich angeben mit $h_1 = 3 \cdot \sqrt{10}$ und $h_2 = \sqrt{10}$.

2. Schritt: Berechnen des Volumens von V_K

Da du die Höhen h_1 und h_2 berechnet hast, kannst du im Folgenden die Volumina V_{K1} und V_{K2} mittels der Beziehung $\boldsymbol{V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h}$ berechnen, wobei der Radius r dem Abstand vom Mittelpunkt M zum Punkt D oder B beträgt, den du bereits berechnet hast mit $|\ \overline{MB}\ | = 4$.
$V_{K1} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot h_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 16 \cdot 3 \cdot \sqrt{10} = 16 \cdot \pi \cdot \sqrt{10}$
$V_{K2} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot h_2 = \frac{16}{3} \cdot \pi \cdot \sqrt{10}$

Da in der Aufgabenstellung aber nach dem Volumen V_K des Doppelkegels K gefragt ist, musst du noch beachten, dass für das gesamte Volumen des Doppelkegels K gilt:
$\boldsymbol{V_K = V_{K1} + V_{K2}}$.
Damit kannst du dann letztendlich das Volumen V_K berechnen:
$V_K = 16 \cdot \pi \cdot \sqrt{10} + \frac{16}{3} \cdot \pi \cdot \sqrt{10} = \frac{64}{3} \cdot \pi \cdot \sqrt{10} \approx 211{,}94$
Das Volumen des Doppelkegels K beträgt ungefähr 212 VE.

e) **▶ Nachweisen, dass Gerade g und Ebene E einen Schnittpunkt S besitzen** (4P)

Gegeben sei die Ebene E in Parameterform

$$E: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

für $s, t \in \mathbb{R}$ und die Gerade g sei gegeben durch

$$g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

für $r \in \mathbb{R}$.

In diesem Aufgabenteil musst du zeigen, dass die Ebene E und die Gerade g genau einen Schnittpunkt S haben.

Um dies nachzuweisen, kannst du zuerst die Koordinatenform der Ebenengleichung der Ebene E aufstellen. Anschließend kannst du g als Vektor umformen und die von r abhängigen Koordinaten in die zuvor aufgestellte Koordinatengleichung der Ebene E einsetzen. Ermittle mögliche Parameterwerte für r, für die sich die Gerade g und die Ebene E schneiden.
Erhältst du genau einen möglichen Parameterwert für r, so kannst du davon ausgehen, dass es folglich auch nur genau einen Schnittpunkt S geben kann.

Ist der Wert für den Parameter r ermittelt, so kannst du diesen Wert in die Geradengleichung von g für r einsetzen und erhältst den Ortsvektor für den gesuchten Schnittpunkt S.

1. Schritt: Bestimmen der Koordinatenform der Ebenengleichung der Ebene E

Um die Koordinatenform der Ebenengleichung zur Ebene E zu erhalten, kannst du mit Hilfe des Normalenvektors $\overrightarrow{n}$ eine Gleichung aufstellen von der Form:

$E: n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z = d,$

wobei du d durch eine Punktprobe ermitteln kannst und du den Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ einsetzen kannst mit $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Verwende also einen Punkt, der garantiert in der Ebene E liegt, beispielsweise den Punkt A mit $A(3 \mid -1 \mid 2)$ und setze ein:

$E: 0 \cdot 3 + (-3) \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = 3 + 2 = 5 = d$

Damit gilt $d = 5$ und du kannst die Koordinatenform der Ebenengleichung der Ebene E direkt angeben:

$E: 0 \cdot x + (-3) \cdot y + 1 \cdot z = -3 \cdot y + z = 5$

Damit hast du die Ebenengleichung der Ebene E in Koordinatenform ermittelt mit $\boldsymbol{E: -3y + z = 5}$ für jedes reelle x. Das heißt, dass die Ebene E senkrecht zur y-z-Ebene liegt.

2. Schritt: Bestimmen des Parameterwerts für r

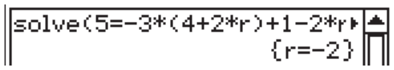
Da du nun die Ebenengleichung der Ebene E in Koordinatenform ermittelt hast, kannst du g zeilenweise in die Ebenengleichung $\boldsymbol{E: -3y + z = 5}$ für y und z einsetzen und nach r auflösen und erhältst entsprechende Werte, für die die Gerade g die Ebene E schneidet.

Du erhältst durch zeilenweises Einsetzen in die Koordinatenform der Ebenengleichung von E die Gleichung:

$5 = -3(4+2r) + (1-2r)$

Gib diese Gleichung im CAS ein und löse mittels `solve`-Befehl.

Das CAS gibt dir aus, dass diese Gleichung für $r = -2$ erfüllt ist.



Damit hast du einen Parameterwert für r ermittelt, für welchen die Gerade g die Ebene E schneidet. Da nur ein Parameterwert für r möglich ist, hast du gezeigt, dass es auch nur genau einen Schnittpunkt S gibt.

3. Schritt: Ortsvektor des Schnittpunktes S ermitteln

Um den Schnittpunkt S bestimmen zu können, kannst du den ermittelten Parameterwert für r in die Geradengleichung von g einsetzen, um den Ortsvektor des Schnittpunktes S zu bestimmen, der dir den Schnittpunkt S liefert.
Durch Einsetzen von $r = -2$ erhältst du:

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Das liefert dir, dass die Geraden g die Ebene E im Punkt $S(3 \mid 0 \mid 5)$ schneidet.

▶ Prüfen, ob Schnittpunkt S auf $\overline{AC}$ liegt

Betrachte den Schnittpunkt $S(3 \mid 0 \mid 5)$ der Geraden g und Ebene E und die Symmetrieachse $\overline{AC}$. In diesem Aufgabenteil sollst du überprüfen, ob der Schnittpunkt $S(3 \mid 0 \mid 5)$ auf der Symmetrieachse $\overline{AC}$ liegt.

Um das untersuchen zu können, musst du beachten, dass der Schnittpunkt $S(3 \mid 0 \mid 5)$ auf der **Strecke $\overline{AC}$** liegt und nicht allgemein auf einer Geraden durch A und C liegt, denn diese kann über die Strecke $\overline{AC}$ hinaus gehen.
Stelle also dazu eine geeignete Gleichung ac auf, die nur die Punkte beschreibt, die auf der Strecke $\overline{AC}$ liegen.

Setze anschließend den Ortsvektor des Schnittpunktes $S(3 \mid 0 \mid 5)$ mit der aufgestellten Streckengleichung ac gleich und überprüfe, ob der Schnittpunkt $S(3 \mid 0 \mid 5)$ auf der Strecke $\overline{AC}$ liegt.

1. Schritt: Aufstellen der Streckengleichung *ac*

Eine Gleichung die alle Punkte auf der Strecke $\overline{AC}$ beschreibt, lautet beispielsweise

$$ac: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OA} + u \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}; \text{für } u \in \mathbb{R} \text{ und } 0 \leq u \leq 1,$$

wobei der Ortsvektor $\overrightarrow{OA}$ zum Punkt A der Strecke zeigt und der Richtungsvektor $\overrightarrow{AC}$ die Richtung der Strecke repräsentiert.
Der Parameter u hingegen darf nur Werte im Intervall $0 \leq u \leq 1$ annehmen, damit nur Punkte auf der Strecke $\overline{AC}$ erfasst werden.
Der Vektor $\overrightarrow{AC}$ verbindet hier A und C. Für $u = 0$ erhältst du A, für $u = 1$ erhältst du entsprechend C. Also werden für $0 \leq u \leq 1$ diejenigen Punkte erreicht, die zwischen A und C auf der Strecke $\overline{AC}$ liegen.
Wäre nämlich $u > 1$, so würde der Richtungsvektor $\overrightarrow{AC}$ über den Punkt C hinauszeigen und damit einen Punkt erfassen, der nicht mehr auf der Strecke $\overline{AC}$ liegt. Analog gilt für dan Fall $u < 0$, dass der Ortsvektor $\overrightarrow{x}$ auf einen Punkt vor dem Punkt A und damit nicht mehr auf die Strecke $\overline{AC}$ verwiesen würde.

2. Schritt: Überprüfen, ob Schnittpunkt *S* auf der Strecke *AC* liegt

Um zu überprüfen, ob der Schnittpunkt $S(3 \mid 0 \mid 5)$ auf der Strecke liegt, kannst du dessen Ortsvektor mit der Gleichung ac der Strecke $\overline{AC}$ gleichsetzen und erhältst einen Wert für den Parameter u. Liegt dieser Parameterwert für u im Intervall $0 \leq u \leq 1$, so liegt der Schnittpunkt $S(3 \mid 0 \mid 5)$ auf der Strecke $\overline{AC}$.

$$ac = \overrightarrow{OS}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Dazu kannst du folgendes Gleichungssystem aufstellen und einen Parameterwert für den Parameter u ermitteln:

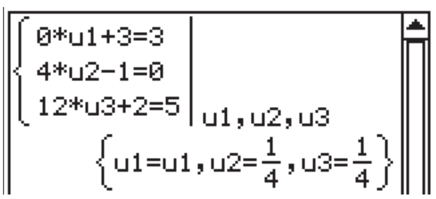
I $\quad 3 = 3 + u \cdot 0$

II $\quad 0 = -1 + u \cdot 4$

III $\quad 5 = 2 + u \cdot 12$

Dieses lineare Gleichungssystem kannst du mit Hilfe des CAS lösen. Wähle dazu unter `Keyboard → 2D` den Befehl für ein Gleichungssystem und gib an, dass 3 Gleichungen zu lösen sind. Die Variable nach der gelöst werden soll, sei u. Führe dabei für jede Zeile eine eigne Variable ein.

Trage die Gleichungen aus dem oben bereits aufgeführten linearen Gleichungssystem wie unten ein und bestätige mit Enter.



Das CAS gibt dir genau einen einheitlichen Wert für u aus und das heißt, dass für den Parameterwert $u = \frac{1}{4}$ die Gleichungen erfüllt werden.
Du hast also gezeigt, dass der Schnittpunkt $S(3 \mid 0 \mid 5)$ auf der Strecke $\overline{AC}$ liegt, da sich der entsprechende Parameterwert für u im Intervall $0 \leq u \leq 1$ befindet.

f) **► Begründen, dass sich der Drache um die Achse $\overrightarrow{BD}$ gedreht hat** (4P)

Betrachte das Drachenviereck $ABCD$. Dieses Drachenviereck stellt nun einen realen Drachen dar, wobei 1 LE im Modell 10 cm in der Wirklichkeit entspricht. Der Drachen steigt nun 30 m in die Höhe, wodurch seinen Eckpunkten neue Koordinaten zugewiesen werden mit $A'(3 \mid -27 \mid 308)$, $B'(7 \mid -18 \mid 311)$, $C'(3 \mid -15 \mid 312)$ und $D'(-1 \mid -18 \mid 311)$.
Durch den Steigungsvorgang hat sich der Drache gedreht.

Du sollst hierbei begründen, dass er sich um seine Achse $\overline{BD}$ gedreht hat.

Damit sich der Drache um die Achse $\overline{BD}$ gedreht hat, musst du zeigen, dass die Vektoren vom Startpunkt B bzw. D zum Ausgangspunkt B' bzw. D' gleich sind. Ist das nicht der Fall, so hat sich die Achse $\overline{BD}$ im Steigungsprozess geneigt und der Drache kann sich folglich nicht um diese gedreht haben.
Zeige also, dass $\boldsymbol{\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{DD'}}$ gilt.

$$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 7 \\ -18 \\ 311 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \\ 300 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{OD'} - \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} -1 \\ -18 \\ 311 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Das liefert dir, dass $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{DD'}$ gilt und damit hast du gezeigt, dass der Drache sich um die Achse BD dreht.