a) ▶ **Erwartungswert und Standardabweichung bestimmen** (8P)

Du weißt, dass sich auf jedem Glücksrad zwei Zahlen befinden und dass diese beiden Zahlen mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten. Die Wahrscheinlichkeit für jede Zahl auf einem Glücksrad beträgt also zunächst 0,5.

Nun wird aber nicht ein Glücksrad, sondern beide Glücksräder gedreht. Da die beide Ergebnisse laut Aufgabenstellung unabhängig sind, kannst du von einem **zweistufigen Zufallsexperiment** ausgehen:

- Erst wird Glücksrad 1 gedreht und zeigt entweder 1 oder 2, jeweils mit 50 % Wahrscheinlichkeit.
- Dann wird Glücksrad 2 gedreht und zeigt entweder 1 oder 3, ebenfalls mit je 50 % Wahrscheinlichkeit.
- Die Wahrscheinlichkeit für die **Paare** (1,1); (1,3); (2,1) und (2,3) erhältst du über die Pfadregel.

Nun beschreibt die Zufallsgröße X die **Summe** der beiden Zahlen. Bestimme zunächst eine **Wahrscheinlichkeitsverteilung** von X. Überlege also, welche möglichen Summen zustande kommen können und mit welcher Wahrscheinlichkeit sie auftreten. Den Erwartungswert $E(X)$ erhältst du über die Formel

$$E(X) = \sum_{i=0}^{n} x_i \cdot p_i = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \cdots + x_n \cdot p_n$$

Es wird also jeweils die **Summe** x_i mit der zugehörigen Wahrscheinlichkeit p_i multipliziert und dann die Summe über diese Produkte gebildet.

Für die Standardabweichung σ findest du die Formel:

$$\begin{aligned}\sigma = \sqrt{\operatorname{Var}(X)} &= \sqrt{\sum_{i=0}^{n} p_i \cdot (x_i - E(X))^2} \\ &= \sqrt{p_1 \cdot (x_1 - E(X))^2 + p_2 \cdot (x_2 - E(X))^2 + \cdots + p_n \cdot (x_n - E(X))^2}.\end{aligned}$$

1. Schritt: Wahrscheinlichkeitsverteilung bestimmen

Beim Drehen der beiden Glücksräder können folgende Paare entstehen:

(1,1); (1,3); (2,1); (2,3)

Da alle Elementarereignisse mit 0,5 gleich wahrscheinlich sind, ergibt sich für jedes Paar die Wahrscheinlichkeit $0,5 \cdot 0,5 = 0,25$.

Jedes der Paare ergibt eine eigene Summe: $1+1=2$; $1+3=4$; $2+1=3$; $2+3=5$.

Die Zufallsgröße X kann also die Werte 2, 3, 4 und 5 annehmen, wobei jeder der Werte mit der Wahrscheinlichkeit 0,25 angenommen wird:

x_i	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,25	0,25	0,25	0,25

2. Schritt: Erwartungswert berechnen

Multipliziere je den möglichen Ausgang mit der zugehörigen Wahrscheinlichkeit und bilde im Anschluss die Summe über diese Produkte:

$$\begin{aligned}E(X) &= 2 \cdot 0,25 + 3 \cdot 0,25 + 4 \cdot 0,25 + 5 \cdot 0,25 \\ &= 3,5\end{aligned}$$

3. Schritt: Standardabweichung berechnen

Setze die möglichen Ausgänge x_i, die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten p_i und den eben berechneten Erwartungswert $E(X)$ in die Formel zur Berechnung der Standardabweichung ein:

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{\sum_{i=0}^{n} p_i \cdot (x_i - E(X))^2} \\ &= \sqrt{0,25 \cdot (2-3,5)^2 + 0,25 \cdot (3-3,5)^2 + 0,25 \cdot (4-3,5)^2 + 0,25 \cdot (5-3,5)^2} \\ &= \sqrt{0,25 \cdot 2,25 + 0,25 \cdot 0,25 + 0,25 \cdot 0,25 + 0,25 \cdot 2,25} \\ &= \sqrt{1,25} \approx 1,12\end{aligned}$$

Die Zufallsgröße X hat den Erwartungswert $E(X) = 3,5$ und die Standardabweichung $\sigma \approx 1,12$.

▶ Hauptgewinn für faires Spiel bestimmen

Ein Spiel ist fair, wenn der zu erwartende Gewinn genau Null beträgt. Oder anders formuliert: Wenn die zu erwartende Auszahlung genau dem Einsatz entspricht. Denn dann ist auf lange Sicht gesehen weder der Spieler noch der Spielanbieter der Gewinner oder der Verlierer.

Du kannst nun so vorgehen:

- Integriere die Beträge, die laut Aufgabenstellung ausbezahlt werden, in die Wahrscheinlichkeitsverteilung von oben.
- Berechne sodann die zu erwartende Auszahlung. Sie soll gleich groß sein wie der Einsatz, also 1.
- Setze die zu erwartende Auszahlung gleich 1 und löse diese Gleichung nach h auf.

1. Schritt: Auszahlung in Wahrscheinlichkeitsverteilung integrieren

x_i	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,25	0,25	0,25	0,25
Auszahlung in €:	h	0	0	1

2. Schritt: Zu erwartende Auszahlung berechnen und h ermitteln

Sei Y die Zufallsgröße, welche die Auszahlung beschreibt. Berechne den Erwartungswert $E(Y)$:

$$\begin{aligned}E(Y) &= 0,25 \cdot h + 0,25 \cdot 0 + 0,25 \cdot 0 + 0,25 \cdot 1 \\ &= 0,25h + 0,25\end{aligned}$$

Nun soll das Spiel fair sein. Die zu erwartende Auszahlung soll also gleich dem Einsatz von 1 € sein. Setze also $E(Y) = 1$ und löse nach h auf:

$$\begin{aligned}E(Y) &= 1 \\ 0,25h + 0,25 &= 1 \qquad \mid -0,25 \\ 0,25h &= 0,75 \qquad \mid \cdot 4 \\ h &= 3\end{aligned}$$

Die Höhe des Hauptgewinns muss 3 € betragen, damit das Spiel fair ist.

b) ▶ **Wahrscheinlichkeit bestimmen** (7P)

Aus der Aufgabenstellung weißt du, dass die Wahrscheinlichkeit für Ergebnis „1" neunmal so groß ist wie für Ergebnis „2". Du kannst daher sagen: die Wahrscheinlichkeit, Ergebnis „2" zu erhalten, sei p_2. Dann ist die Wahrscheinlichkeit für „1" gerade $p_1 = 9 \cdot p_2$. Da dies die einzigen beiden Felder auf dem Glücksrad sind, muss die **Summe** der beiden Wahrscheinlichkeiten genau 1 ergeben.

So kannst du die Wahrscheinlichkeiten für die Ergebnisse „1" und „2" berechnen.

Nun sollst du die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmen, dass bei vier Drehungen das Ergebnis „2" mindestens einmal auftritt. Überlege dir hierbei: Das Gegenereignis zu „mindestens einmal 2" ist „kein mal 2". Berechne die Wahrscheinlichkeit also über das Gegenereignis und mit Hilfe der Pfadregel.

1. Schritt: Wahrscheinlichkeiten für „1" und „2" berechnen

Es gilt: $p_1 = 9 \cdot p_2$. Außerdem gilt: $p_1 + p_2 = 1$. Das heißt:

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 &= 1 && \mid p_1 = 9 \cdot p_2 \\ 9 \cdot p_2 + p_2 &= 1 \\ 10 \cdot p_2 &= 1 && \mid :10 \\ p_2 &= 0{,}1 \end{aligned}$$

Also ist $p_1 = 9 \cdot 0{,}1 = 0{,}9$.

Das Ergebnis „1" wird mit der Wahrscheinlichkeit 0,9 gedreht, das Ergebnis „2" mit der Wahrscheinlichkeit 0,1.

2. Schritt: Wahrscheinlichkeit für mindestens einmal „2" berechnen

$$\begin{aligned} P(\text{mindestens einmal „2"}) &= 1 - P(\text{kein mal „2"}) && \mid \text{kein mal „2" heißt: nur Ergebnis „1".} \\ &= 1 - P(\text{vier mal „1"}) \\ &= 1 - (0{,}9)^4 \\ &= 1 - 0{,}6561 \\ &= 0{,}3439 \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 34,39 % erhält man bei viermaligem Drehen mindestens einmal das Ergebnis „2".

▶ **Mindestanzahl der Drehungen berechnen**

Es wird eine ähnliche Situation betrachtet wie gerade eben: Gerade wurde **einmal** gedreht; nun ist die Anzahl der Drehungen unbekannt. Du kannst also zunächst sagen: es wird n-mal gedreht.

Betrachtet wird immer noch die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ergebnis „2" mindestens einmal auftritt. Bei n-maligem Drehen lautet diese Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} P(\text{mindestens einmal „2"}) &= 1 - P(\text{kein mal „2"}) && \mid \text{kein mal „2" heißt: nur Ergebnis „1".} \\ &= 1 - P(n \text{ mal „1"}) \\ &= 1 - (0{,}9)^n \end{aligned}$$

Sie soll größer werden als 0,5. Damit gilt weiter:

$$\begin{aligned} 1-0,9^n &> 0,5 && \mid -1 \\ -0,9^n &> -0,5 && \mid \cdot(-1) \\ 0,9^n &< 0,5 && \mid \ln(\;) \\ \ln(0,9^n) &< \ln(0,5) && \mid \text{Logarithmusregeln} \\ n\cdot\ln(0,9) &< \ln(0,5) && \mid :\ln(0,9) \quad \text{Achtung: } \ln(0,9)<0 \\ n &> \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,9)} \approx 6,58 \end{aligned}$$

Hinweis: Der Operator **Bestimmen** lässt auch eine Lösung beispielsweise durch systematisches Probieren zu.

Mit $n > 6,58$ ist $n \geq 7$. Es folgt also: Das Glücksrad muss mindestens 7 Mal gedreht werden, damit das Ergebnis „2“ mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 50 % mindestens einmal auftritt.