a) (1) ► **Berechnen des Wendepunkts des Graphen von g** (15 BE)

Die notwendigen Bedingungen für eine Wendestelle sind:
Besitzt die zweite Ableitung einer betrachteten Funktion eine Nullstelle und ist der Funktionswert der dritten Ableitungsfunktion dieser Funktion an dieser Stelle ungleich null, so besitzt der Graph der betrachteten Funktion an dieser Stelle einen Wendepunkt.

1. Schritt: Bestimmen der Ableitungsfunktionen

Die gesuchten Ableitungsfunktionen von g kannst du mit Hilfe deines CAS bestimmen. Verwende dazu den Ableitungsbefehl deines CAS wie folgt:

Zweite Ableitung: $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dx}^2}(\mathrm{g}(\mathrm{x}))$

Dritte Ableitung: $\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{dx}^3}(\mathrm{g}(\mathrm{x}))$

Es sollten sich hier diese Ableitungsfunktionen ergeben haben:

$$g''(x) = (x-2) \cdot \mathrm{e}^{1-x}$$
$$g'''(x) = -(x-3) \cdot \mathrm{e}^{1-x}$$

2. Schritt: Nullstellen der zweiten Ableitungsfunktion

Bestimme die Nullstellen der zweiten Ableitungsfunktion g'' indem du deren Funktionsterm gleich null setzt und diesen nach x auflöst:

$$g''(x) = 0$$
$$0 = -\mathrm{e}^{1-x} \cdot (2-x) \quad \mid \text{ Anwenden des Satzes vom Nullprodukt (da } -\mathrm{e}^{1-x} \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ ungleich null)}$$
$$0 = 2 - x \quad \mid +x$$
$$x_W = 2$$

Die Wendestelle von g befindet sich bei $x_W = 2$.

3. Schritt: Überprüfen der hinreichenden Bedingung

Ob sich bei $x_W = 2$ auch wirklich eine Wendestelle befindet bestimmst du nun mit Hilfe der dritten Ableitung g'''. Nimmt diese für $x_W = 2$ einen Wert ungleich null an, so befindet sich an dieser Stelle eine Wendestelle:

x_W in $g'''(x)$:
$$g'''(x_W) = -(2-3) \cdot \mathrm{e}^{1-2}$$
$$g'''(x_W) = \mathrm{e}^{-1} \cdot 1$$
$$g'''(x_W) = \mathrm{e}^{-1}$$

Da die dritte Ableitung für $x_W = 2$ den Wert $g'''(x_W) = \mathrm{e}^{-1} \neq 0$ annimmt, befindet sich an dieser Stelle die Wendestelle von g.

4. Schritt: Bestimmen der y - Koordinate der Wendestelle

Bestimme durch Einsetzten von x_W in den Funktionsterm von g die zur Wendestelle zugehörige y - Koordinate:

$g(x_W) = 2 \cdot e^{1-2}$
$g(x_W) = 2 \cdot e^{-1}$ $(\approx 0{,}74)$

Die Koordinaten des Wendepunktes W des Graphen von g sind: $W(2 \mid 2 \cdot e^{-1})$.

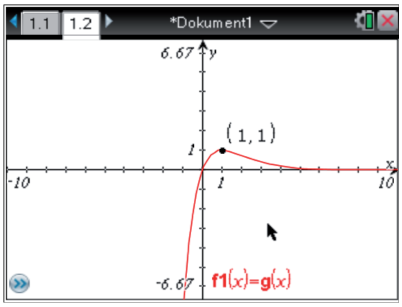
(2) ▶ **Festlegen der Skalen und Einzeichnen des Wendepunktes**

Mögliche Vorgehensweise beim Festlegen der Skalen:
Da die y - Koordinate des Wendepunkts keine ganze Zahl ist, ist es relativ schwer mit Hilfe des oben bestimmten Wendepunktes von g die Skalen der Achsen festzulegen. Betrachtest du aber Abbildung 1 näher, so kannst du die Lage des Hochpunkts leicht zu erkennen.
Da der Hochpunkt des Graphen von g auf dem Gitter, welches von x und y - Achse aufgespannt wird, liegt, lassen sich mit dessen Koordinaten die Skalen leichter ergänzen.

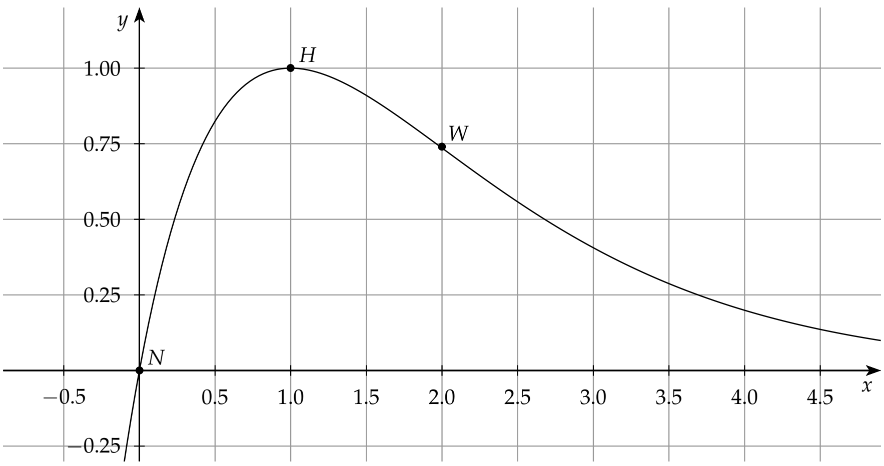
Berechne die Koordinaten des Hochpunkts H mit Hilfe deines CAS. Lasse dir dazu den Graphen von g im CAS zeichnen und bestimme über diese Eingabenfolge die Koordinaten des Hochpunkts H:

`menu` → 6: Graph analysieren → 3: Maximum

→ Grenzen um die Position des Hochpunkts setzen



Die Koordinaten des Hochpunkt sind $H(1 \mid 1)$. Zeichne diesen nun in die Abbildung ein, und lege mit Hilfe dieser Koordinaten die Skalen der Achsen fest.
Deine Zeichnung sollte so aussehen:



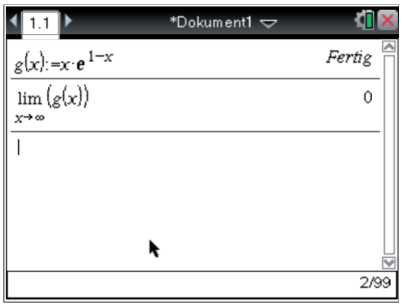
(3) ▶ **Bestimmen der Grenzwerte und Begründen des Verlaufs**

(1) Grenzwert: $x \to \infty$:

Der Grenzwert von g für $x \to \infty$ kannst du mit deinem CAS bestimmen. Füge dazu über diese Eingabenfolge einen Grenzwert in den Calculator - Modus ein:

`menu` $\to$ 4: Analysis $\to$ 4: Limes

Hast du den Grenzwert mit Hilfe des CAS richtig berechnet, so sollte dessen Berechnung wie in der Abbildung rechts aussehen.



Für $x \to \infty$ ergibt sich hier demnach folgender Grenzwert:

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$$

Da die Exponentialfunktion ein stärkeres Wachstum als der lineare Teil der Funktionsgleichung von g besitzt, wird dieser bei der Grenzwertbetrachtung nicht weiter betrachtet. Nähert sich der der Exponent der Exponentialfunktion wie oben $-\infty$ an, so wird der Betrag der Exponentialfunktion immer kleiner und der Graph von f nähert sich für $x \to \infty$ der x - Achse in positiver Richtung an.

(2) Grenzwert: $x \to -\infty$:

Berechne den Grenzwert von g für $x \to -\infty$ wie oben mit Hilfe des CAS. Es sollte sich dieser Grenzwert ergeben haben:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$$

Die Exponentialfunktion besitzt auch hier ein stärkeres Wachstum als der lineare Teil der Funktionsgleichung von g. Da der Exponent der Exponentialfunktion für $x \to -\infty$ gegen $+\infty$ strebt, wird der Betrag der Exponentialfunktion immer größer. Da der lineare Teil der Funktionsgleichung von g für $x \to -\infty$ negativ wird, geht der Graph von g für $x \to -\infty$ gegen $-\infty$.

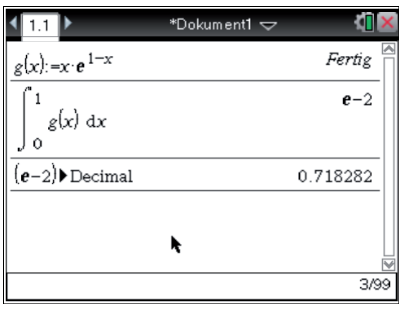
b) (1) ▶ **Berechnen des Integrals** (10 BE)

Die Grenzen des Integrals kannst du der von dir im Aufgabenteil a skalierten Abbildung entnehmen, diese sind: $x_u = 0$ und $x_o = 1$. Den Wert des Integrals kannst du nun mit Hilfe deines CAS berechnen.

Füge dazu über diese Eingabenfolge ein Integral in den Calculator - Modus deines CAS ein:

`meun` $\to$ 4: Analysis $\to$ 3: Integral

Hast du das Integral mit dem CAS berechnen lassen, so sollte dieses und dessen Wert wie in der nebenstehenden Abbildung aussehen.



Der Inhalt der in der Abbildung 1 markierten Fläche ist: $F = \mathrm{e} - 2 = 0{,}718$.

(2) ► **Bestimmen des Inhalts der Fläche A(u)**

Den Inhalt der Fläche $A(u)$ in Abhängigkeit der Variablen u bestimmst du über ein Integral. Die obere Grenze des Integrals wird durch die Parallele zur y - Achse bei $x = u$ definiert. Da der Graph von g in negativer x - Richtung keine Fläche mit der x - Achse einschließt, ist $x = 0$ die untere Grenze des zu bestimmenden Integrals.
Bestimmen von $A(u)$:

$$A(u) = \int_0^u g(x)\mathrm{d}x = [G(x)]_0^u = \left[-(x+1)\cdot \mathrm{e}^{1-x}\right]_0^u$$

$$= \left[-(u+1)\cdot \mathrm{e}^{1-u}\right] - \left[-(0+1)\cdot \mathrm{e}^{1-0}\right]$$

$$= -(u+1)\cdot \mathrm{e}^{1-u} - \left[-1\cdot \mathrm{e}^{1}\right]$$

$$= -(u+1)\cdot \mathrm{e}^{1-u} + \mathrm{e}$$

(3) ► **Berechnen von u so, dass A(u) = 2F gilt**

Willst du nun u so bestimmen, dass $A(u) = 2\cdot F$ gilt, musst du die eben bestimmte Flächenfunktion $A(u)$ mit $2\cdot F$ gleichsetzen. Die resultierende Gleichung sollte so aussehen:

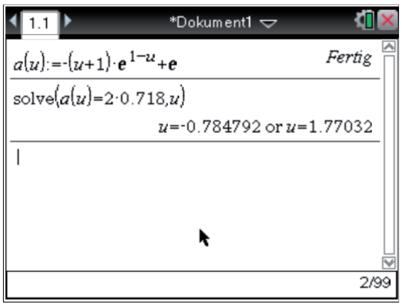
$$A(u) = -(u+1)\cdot \mathrm{e}^{1-u} + \mathrm{e}$$

$$A(u) = 2\cdot F$$

$$2\cdot F = -(u+1)\cdot \mathrm{e}^{1-u} + \mathrm{e}$$

Diese Gleichung von Hand zu lösen wäre sehr umständlich. Verwende deshalb zum Lösen dieser Gleichung deinen CAS.
Verwende dazu im Calculator - Modus den `solve(..)` - Befehl des CAS. Dieser Befehl löst die eingetragenen Gleichung nach der gewünschten Variablen, welche getrennt durch ein Komma, hinter die Gleichung eingetragen werden muss. Hier ist dieser Befehl so anzuwenden:

`solve(`$2\cdot F = -(u+1)\cdot \mathrm{e}^{1-u} + \mathrm{e}$`,u)`



Da $u > 0$ gilt, nimmt A nur für $u = 1{,}77$ den Wert $A(u) = 2\cdot F$ an.

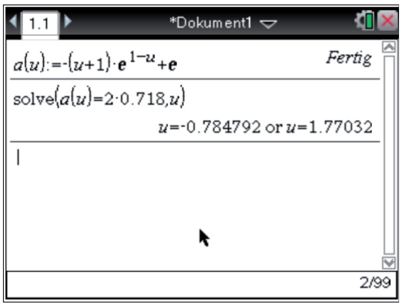
(4) ► **Untersuchen ob es ein u gibt, so dass A(u) = 4F gilt**

Gehe hier vor wie im vorherigen Aufgabenteil. Hier gilt es diese Gleichung mit dem CAS zu lösen:

$$4\cdot F = -(u+1)\cdot \mathrm{e}^{1-u} + \mathrm{e}$$

Verwende zum Lösen der Gleichung wie oben den `solve(..)` - Befehl des CAS. Wende diesen dazu so an:

`solve(`$4\cdot F = -(u+1)\cdot \mathrm{e}^{1-u} + \mathrm{e}$`,u)`



Da die einzige Lösung dieser Gleichung negativ ist, bedeutet das, dass es kein u gibt, für welches $A(u) = 4\cdot u$ gilt.

(5) ▶ **Berechnen des Grenzwertes**

Den Grenzwert von $A(u)$ für $u \rightarrow \infty$ bestimmst du wie in den vorherigen Aufgabenteilen mit Hilfe deines CAS. Es ergibt sich dieser Grenzwert:

$$\lim_{u\to\infty} A(u) = \mathrm{e}$$

(6) ▶ **Erläutern des Ergebnisses für die betrachtete Fläche**

Der Grenzwert für $u \rightarrow \infty$ der Flächenfunktion A entspricht dem maximalen Flächeninhalt, welchen der Graph von g mit der x - Achse und der zur y - Achse bei $x = u$ einschließt.

c) (1) ▶ **Angeben des gesuchten Funktionsterms** (7 BE)

Gesucht ist hier der Funktionsterm einer ganzrationalen Funktion dritten Grades, welche an den Stellen $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 2$ mit dem Graphen von g übereinstimmt, außerdem sollen der Graph der gesuchten Funktion und g an der gleichen Stelle einen Hochpunkt besitzen.
Die allgemeine Form einer ganzrationalen Funktion dritten Grades ist:

$$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

Um die gesuchten Parameter $a,\ b,\ c$ und d eindeutig zu bestimmen, bedarf es einem Gleichungssystem mit vier Gleichungen.
Da der Graph der Funktion bei $x_1,\ x_2$ und x_3 mit dem Graph der Funktion g übereinstimmen soll, kannst du mit Hilfe dieser Forderungen die ersten drei Gleichungen des Gleichungssystems aufstellen:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & g(0) = f(0) = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d \\ \text{II} & g(1) = f(1) = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d \\ \text{III} & g(2) = f(3) = a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d \end{array}$$

Wie oben bereits beschrieben, soll der Hochpunkt des Graphen der Funktion f die selben Koordinaten wie der Hochpunkt des Graphen von g besitzen. Die Koordinaten des Hochpunkts des Graphen von g hast du bereits im Aufgabenteil a bestimmt, diese waren:
$H(1\,|\,1)$
Damit der Graph der Funktion f an der Stelle $x_2 = 1$ ein lokales Maximum besitzt, müssen die Bedingungen für eine Maximalstelle bei x_1 erfüllt sein. Diese Bedingungen sind hier:
$f'(1) = 0$ und $f''(1) < 0$

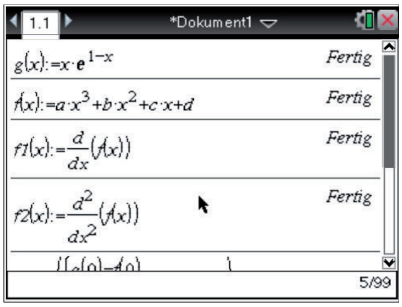
Um die gesuchte Funktion f richtig zu modellieren, fügst du die oben genannten Restriktionen für eine Maximalstelle bei x_1 wie folgt in das Gleichungssystem ein:

$$\begin{array}{ll} \text{IV} & f'(1) = 0 \\ \text{V} & f''(1) < 0 \end{array}$$

Damit hat sich folgendes Gleichungssystem ergeben:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & g(0) = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d \\ \text{II} & g(1) = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d \\ \text{III} & g(2) = a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d \\ \text{IV} & f'(1) = 0 \\ \text{V} & f''(1) < 0 \end{array}$$

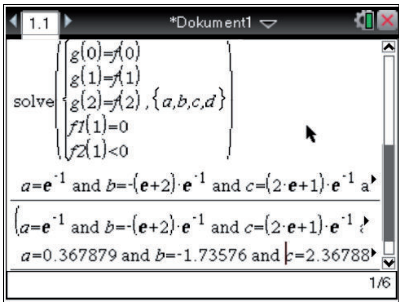
Das entstandene Gleichungssystem kannst du nun mit Hilfe deines CAS lösen. Füge dazu über diese Eingabenfolge ein Gleichungssystem in das entsprechende Calculator - Dokument deines CAS ein:



`menu` → 3: Algebra → 7: Gleichungssystem lösen

→ 1: Gleichungssystem lösen

Es ist hier ein Gleichungssystem mit insgesamt 4 Variablen und 5 Gleichungen zu lösen. Eine beispielhafte Lösung des Gleichungssystems mit Hilfe des CAS ist in der nebenstehenden Abbildung dargestellt.



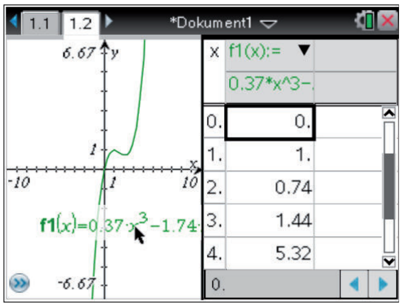
Das Gleichungssystem besitzt folgende Lösungen:
$a = 0,37$; $b = -1,74$; $c = 2,37$ und $d = 0$.

Der Funktionsterm der gesuchten ganzrationalen Funktion dritten Grades ist:

$$f(x) = 0,37 \cdot x^3 - 1,74 \cdot x^2 + 2,37 \cdot x$$

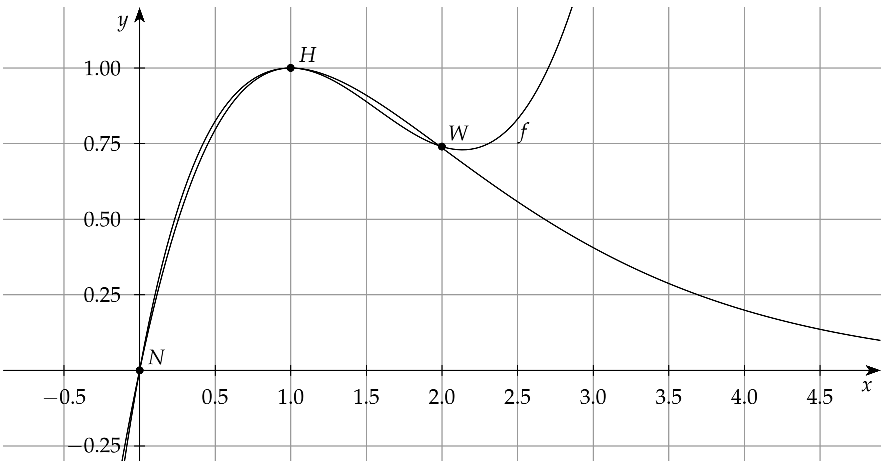
(2) ▶ **Skizzieren des Graphen in die Abbildung 1**

Beim Skizzieren des Graphen von f kann dir ebenfalls das CAS behilflich sein. Trage dazu den Funktionsterm von f in den Graphs - Modus deines CAS ein und lasse dir über diese Eingabenfolge die zu f zugehörige Wertetabelle anzeigen:



`menu` → 2: Ansicht → A: Wertetabelle einblenden

Du solltest die Abbildung 1 so ergänzt haben:



c) (1) ► **Angeben des Funktionsterms und Skizzieren des Graphen** (8 BE)

1. Schritt: Angeben des Funktionsterms

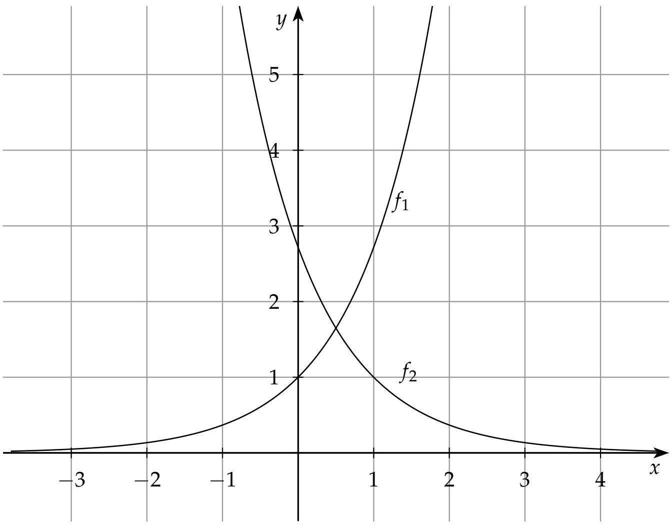
Will man eine Funktion an der y - Achse spiegeln, so versieht man jedes im Exponenten der Exponentialfunktion auftretende x mit einem negativen Vorzeichen. Will man eine Funktion um einen konstante Faktor strecken oder stauchen, so multipliziert man den gesamten Funktionsterm mit dem jeweiligen Faktor.
Aus diesen Informationen ergibt sich der Funktionsterm für f_2:

$f_2(x) = (\mathrm{e}^{-x}) \cdot \mathrm{e} = \mathrm{e}^{-x+1}$

2. Schritt: Skizzieren des Funktionsterms

Beim Zeichnen des Graphen der Funktion f_2 kannst du dich am Graphen der Funktion f_1 orientieren. Das heißt du spiegelst den von Graphen f_1 und vergrößerst diesen um den Faktor $\mathrm{e} \approx 2{,}7$.

Es sollte sich hier dieses Schaubild hier ergeben:



(2) ► **Bestimmen der Funktionsterme und Angeben der Koordinaten**

1. Schritt: Bestimmen des Funktionsterms von f_3

Bei dem Graphen der Funktion f_3 handelt es sich um eine Ursprungsgerade. Berechne über die Steigungsformel für Geraden die Steigung m dieser Ursprungsgeraden.
Hier wird die Steigung m mit Hilfe der Punkte P_1 und P_2 berechnet:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$m = \frac{1-0}{1-0}$$

$$m = 1$$

Funktionsterm von f_3:
$f_3(x) = 1 \cdot x$

2. Schritt: Bestimmen des Funktionsterms von f_4

Beim Graphen der Funktion f_4 handelt es sich um eine an der y - Achse gespiegelte und in x - Richtung verschobene Exponentialfunktion. Dies ist am Verlauf der Funktion und an dem Schnittpunkt von f_4 mit der y - Achse zu erkennen. Spiegle den Funktionsterm von f_4 wie im Aufgabenteil zuvor und berechne die Verschiebung in x - Richtung über eine Punktprobe mit dem Schnittpunkt von f_4 mit der y - Achse bei $S(0 \mid e)$. a entspricht hier der Verschiebung in x - Richtung:

Berechnen der Verschiebung a:

$$f_4(x) = \mathrm{e}^{-x-a}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{e} &= \mathrm{e}^{-0-a} \\ \mathrm{e} &= \mathrm{e}^{-a} && \mid ln(\,) \\ 1 &= -a \\ a &= -1 \end{aligned}$$

Der Funktionsterm von f_4 ist:
$f_4(x) = \mathrm{e}^{-x+1}$.

3. Schritt: Berechnen des Funktionsterms von h

Den Funktionsterm von h berechnest du, indem du das Produkt der Funktionsterme von f_3 und f_4 bildest:

$$h(x) = f_3(x) \cdot f_4(x)$$
$$h(x) = x \cdot \mathrm{e}^{-x+1}$$

Da $g(x) = h(x)$ gilt, hast du gezeigt, dass die Funktionsterme von g und h übereinstimmen.

4. Schritt: Bestimmen der gesuchten Koordinaten

Die zu den Punkten P_3 und P_4 zugehörigen y - Koordinaten bestimmst du, indem du jeweiligen x - Koordinaten der Koordinaten bei $x_3 = 2$ und $x_4 = 3$ in den Funktionsterm von h einsetzt:

Punkt P_3:

$$h(x_3) = x_3 \cdot \mathrm{e}^{-x_3+1}$$
$$h(x_3) = 2 \cdot \mathrm{e}^{-2+1}$$
$$h(x_3) = 2 \cdot \mathrm{e}^{-1} \ (\approx 0{,}74)$$

Punkt P_3:

$$h(x_4) = x_4 \cdot \mathrm{e}^{-x_4+1}$$
$$h(x_4) = 3 \cdot \mathrm{e}^{-3+1}$$
$$h(x_4) = 3 \cdot \mathrm{e}^{-2} \ (\approx 0{,}41)$$

Die gesuchten Koordinaten der Punkte sind: $P_3(2 \mid 2 \cdot \mathrm{e}^{-1})$ und $P_4(3 \mid 3 \cdot \mathrm{e}^{-2})$.