a) **Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen** (11P)

*Schnittpunkte mit der x-Achse*

Zur Bestimmung der Schnittpunkte mit der $x$-Achse setzen wir $f_a(x) = 0$.

$(x+a)\,\mathrm{e}^{-x} = 0$

Ein Produkt ist Null, wenn einer seiner Faktoren Null ist. Da $\mathrm{e}^{-x}$ niemals Null werden kann, genügt es, die Klammer allein Null zu setzen.

$x + a = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -a$

Die Graphen aller Funktionen der Schar $f_a(x)$ besitzen einen Schnittpunkt mit der $x$-Achse bei $N\,(-a|0)$.

*Schnittpunkt mit der y-Achse*

Zur Bestimmung der Schnittpunkte mit der $y$-Achse setzen wir $x = 0$.

$(0+a)\,\mathrm{e}^{0} = a \cdot 1 = a$

Die Graphen aller Funktionen der Schar $f_a(x)$ besitzen einen Schnittpunkt mit der $y$-Achse bei $S\,(0|a)$.

**Extrempunkte**

Zur Bestimmung der Extrempunkte werden die ersten beiden Ableitungen benötigt. Diese bilden wir nach der Produkt- und Kettenregel.

$$\begin{aligned} f_a'(x) &= 1 \cdot \mathrm{e}^{-x} + (x+a) \cdot (-\mathrm{e}^{-x}) && |\ \mathrm{e}^{-x} \text{ ausklammern} \\ &= \mathrm{e}^{-x} \cdot (1 - x - a) \\ f_a''(x) &= -\mathrm{e}^{-x} \cdot (1 - x - a) + \mathrm{e}^{-x} \cdot (-1) && |\ \mathrm{e}^{-x} \text{ ausklammern} \\ &= \mathrm{e}^{-x} \cdot (-1 + x + a - 1) \\ &= \mathrm{e}^{-x} \cdot (-2 + x + a) \end{aligned}$$

Um die Extrempunkte zu bestimmen, setzen wir $f_a'(x) = 0$.

$\mathrm{e}^{-x} \cdot (1 - x - a) = 0$

Wie oben können wir den Satz vom Nullprodukt anwenden und die Klammer alleine Null setzen.

$1 - x - a = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 1 - a$

Dieser Wert für $x$ wird nun in $f_a''(x)$ eingesetzt.

$f_a''(1-a) = \mathrm{e}^{-1+a} \cdot (-2 + 1 - a + a) = \mathrm{e}^{-1+a} \cdot (-1) \quad < 0$: Hochpunkt

Zuletzt wird der zugehörige $y$-Wert bestimmt: $f_a(1-a) = (1 - a + a)\,\mathrm{e}^{-1+a} = \left(\mathrm{e}^{-1+a}\right)$.

Die Graphen aller Funktionen der Schar $f_a$ besitzen unabhängig von $a$ einen Hochpunkt $H_a\left(1-a\middle|\mathrm{e}^{-1+a}\right)$.

**Verhalten für $x \to \infty$ bestimmen**

Hierzu schreiben wir den Funktionsterm zunächst um:

$(x+a)\,\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{x+a}{\mathrm{e}^x}.$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+a}{\mathrm{e}^x} = \dfrac{\infty}{\mathrm{e}^\infty} = 0$

Der Ausdruck im Nenner steigt exponentiell, der im Zähler nur linear. Somit wird der Ausdruck im Nenner schnell größer als der im Zähler und der gesamte Bruch läuft gegen Null.
Die Graphen aller Funktionen der Schar $f_a$ haben die $x$-Achse als waagerechte Asymptote für $x \to \infty$.

b) **Schnittpunkt der Graphen von $f_a$ und $f_a'$ nachweisen** (14P)

Zur Bestimmung des Schnittpunkts setzen wir die Funktionsterme von $f_a$ und $f_a'$ gleich.

$$\begin{aligned}
(x+a)\,\mathrm{e}^{-x} &= (1-x-a)\,\mathrm{e}^{-x} && |: \mathrm{e}^{-x} > 0 \text{ für alle } x\\
x+a &= 1-x-a && |+x-a\\
2x &= 1-2a && |:2\\
x &= \tfrac{1}{2}-a
\end{aligned}$$

Wir bestimmen noch den zugehörigen $y$-Wert: $f_a(\frac{1}{2}-a) = \left(\frac{1}{2}-a+a\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}+a} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}+a}$

Die Schaubilder von $f_a$ und $f_a'$ schneiden sich im Punkt $P\left(\frac{1}{2}-a \,\middle|\, \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}+a}\right)$.

**Ortskurve der Schnittpunkte bestimmen**

Wir teilen den Schnittpunkt zunächst in seine Koordinaten auf:

$x = \frac{1}{2}-a \qquad y = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}+a}$

Nun lösen wir die $x$-Koordinate nach $a$ auf und setzen diesen Wert dann in die $y$-Koordinate ein.

$x = \frac{1}{2}-a \quad \Longleftrightarrow \quad a = \frac{1}{2}-x$

Dies eingesetzt in $y$ ergibt:

$y = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-x} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}$

Die Ortskurve der Schnittpunkte hat die Gleichung $g(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}$.

**$a$ für rechtwinkligen Schnitt bestimmen**

Die Graphen zweier Funktionen $f$ und $g$ schneiden sich in einem Punkt $x_0$ rechtwinklig, wenn für die Steigungen in diesem Punkt gilt: $f'(x_0)\cdot g'(x_0) = -1$.

Die Steigung von $f_a$ wird durch $f_a'$ angegeben. Die Steigung von $f_a'$ wird von $f_a''$ angegeben. Somit muss für den Schnittpunkt $x = \frac{1}{2}-a$ gelten: $f_a'(\frac{1}{2}-a)\cdot f_a''(\frac{1}{2}-a) = -1$.

Wir bestimmen zunächst die Werte an der Stelle:

$$\begin{aligned}
f_a'\left(\tfrac{1}{2}-a\right) &= \left(1-\left(\frac{1}{2}-a\right)-a\right)e^{-\left(\frac{1}{2}-a\right)}\\
&= \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}+a}\\
f_a''\left(\tfrac{1}{2}-a\right) &= \left(-2+\left(\frac{1}{2}-a\right)+a\right)e^{-\left(\frac{1}{2}-a\right)}\\
&= \left(-\frac{3}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}+a}
\end{aligned}$$

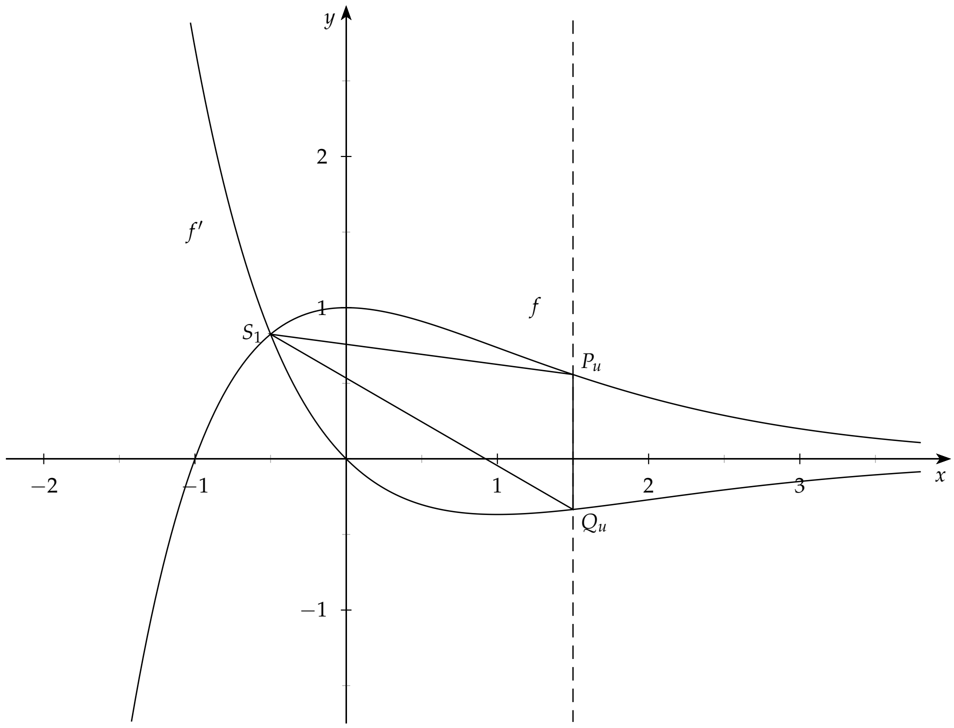
Nun setzen wir die Werte ein:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}+a}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}+a} &= -1\\
-\frac{3}{4}\left(e^{-\frac{1}{2}+a}\right)^2 &= -1 \qquad \left|\cdot\left(-\tfrac{4}{3}\right)\right.\\
e^{-\frac{1}{2}+a}\cdot e^{-\frac{1}{2}+a} &= \frac{4}{3} \qquad |\text{ Potenzgesetze: } a^m\cdot a^n = a^{m+n}\\
e^{\left(-\frac{1}{2}+a\right)+\left(-\frac{1}{2}+a\right)} &= \frac{4}{3}\\
e^{\left(-\frac{1}{2}+a\right)\cdot 2} &= \frac{4}{3}\\
e^{-1+2a} &= \frac{4}{3} \qquad |\ln(\ )\\
-1+2a &= \ln\left(\frac{4}{3}\right) \qquad |+1\\
2a &= \ln\left(\frac{4}{3}\right)+1 \qquad |:2\\
a &= \frac{\ln\left(\frac{4}{3}\right)+1}{2} \approx 0,64
\end{aligned}$$

Für $a \approx 0,64$ schneiden sich die Graphen von $f_a$ und $f_a'$ rechtwinklig.

c) **$u$ so bestimmen, dass der Flächeninhalt maximal wird** (12P)

Sehen wir uns die Aufgabenstellung zunächst graphisch vor:




Für den Flächeninhalt eines Dreiecks gilt immer $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$, wobei $g$ für die Grundseite und $h$ für die Höhe steht.

Als Grundseite bietet sich die Strecke $\overline{P_uQ_u}$ an. Die Höhe muss **rechtwinklig** auf die Grundseite stehen. Da die Grundseite eine parallele zur $y$-Achse ist, muss die Höhe also parallel zur $x$-Achse verlaufen.

Somit bietet sich als Höhe des Dreiecks der **Abstand der $x$-Werte** der Punkte $S_1$ und $P_u$ an.

Tragen wir nun die Formel zusammen. Für die Grundseite gilt:

$$g = \overline{P_uQ_u} = \sqrt{(p_{u1} - q_{u1})^2 + (p_{u2} - q_{u2})^2}$$

Die Punkte $P_u$ und $Q_u$ haben die Koordinaten $P_u\,(u|f_1(u))$ und $Q_u\,(u|f_1'(u))$.

Somit ergibt sich für die Grundseite:

$$\begin{aligned} g &= \sqrt{(u-u)^2 + (f_1(u) - f_1'(u))^2} \\ &= \sqrt{((u+1)\mathrm{e}^{-u} - (-u\mathrm{e}^{-u}))^2} \\ &= (u+1)\mathrm{e}^{-u} + u\mathrm{e}^{-u} && |\ \mathrm{e}^{-u} \text{ ausklammern} \\ &= \mathrm{e}^{-u}\,(u+1+u) = \mathrm{e}^{-u}\,(2u+1) \end{aligned}$$

Die Höhe $h$ ist wie gesagt der Abstand der $x$-Werte von $S_1$ zu $P_u$. Der Abstand von $S_1$ zur $y$-Achse ist $0,5$. Der weitere Abstand von der $y$-Achse zum Punkt $P_u$ ist $u$. Somit gilt:
$h = u + 0,5$

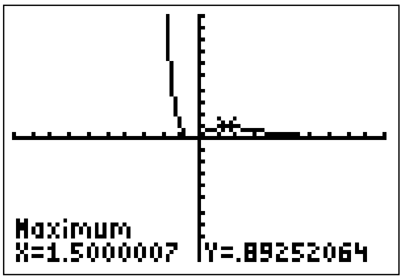
Setzen wir dies in die Formel für den Flächeninhalt ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} A(u) &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-u}\,(2u+1)\cdot(u+0,5) && \mid (2u+1) = 2\cdot(u+0,5) \\ &= \frac{1}{2}\cdot 2\mathrm{e}^{-u}\,(u+0,5)\cdot(u+0,5) \\ &= \mathrm{e}^{-u}\cdot(u+0,5)^2 \\ A(u) &= \mathrm{e}^{-u}\cdot\left(u^2+u+0,25\right) \end{aligned}$$

Diese Gleichung gibt uns den Flächeninhalt des Dreiecks in Abhängigkeit von $u$ an. Wenn wir $u$ so bestimmen wollen, dass der Flächeninhalt maximal wird, müssen wir den Hochpunkt dieser Funktion betrachten.

**Lösung mit dem GTR**

Wir zeichnen das Schaubild von $A$ und bestimmen mit 2nd → TRACE (CALC) → MAXIMUM den Hochpunkt.




Für $u = 1,5$ wird der Flächeninhalt des Dreiecks mit $A \approx 0,9$ maximal.

**Handschriftliche Lösung**

Zur Bestimmung des Hochpunktes werden die ersten beiden Ableitungen benötigt. Diese bilden wir mit der Produktregel.

$$\begin{aligned} A'(u) &= -\mathrm{e}^{-u}\left(u^2+u+0,25\right)+\mathrm{e}^{-u}\,(2u+1) && \mid \mathrm{e}^{-u} \text{ ausklammern} \\ &= \mathrm{e}^{-u}\left(-u^2-u-0,25+2u+1\right) \\ &= \mathrm{e}^{-u}\left(-u^2+u+0,75\right) \\ A''(u) &= -\mathrm{e}^{-u}\left(-u^2+u+0,75\right)+\mathrm{e}^{-u}\,(-2u+1) && \mid \mathrm{e}^{-u} \text{ ausklammern} \\ &= \mathrm{e}^{-u}\cdot\left(u^2-u-0,75-2u+1\right) \\ &= \mathrm{e}^{-u}\cdot\left(u^2-3u+0,25\right) \end{aligned}$$

Wir setzen $A'(u) = 0$.

$$\mathrm{e}^{-u}\left(-u^2+u+0,75\right) = 0$$

Ein Produkt ist Null, wenn einer seiner Faktoren Null wird. Da $\mathrm{e}^{-u}$ niemals Null werden kann, genügt es, die Klammer allein Null zu setzen.

$$\begin{aligned} -u^2+u+0,75 &= 0 && \mid \cdot(-1) \\ u^2-u-0,75 &= 0 \\ u_{1,2} &= \frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{2}\pm 1 \\ u_1 &= 1,5 \\ u_2 &= -0,5 \end{aligned}$$

Da $u \geq 0$ sein soll, kommt nur Lösung $u_1 = 1,5$ in Frage. Diese wird nun in $A''(u)$ eingesetzt.

$A''(1,5) = \mathrm{e}^{-1,5}\left(1,5^2 - 4,5 + 0,25\right) = \mathrm{e}^{-1,5}\left(-2\right) < 0 \quad$ Hochpunkt

Somit wird der Flächeninhalt der Dreiecks für $u = 1,5$ maximal.

d) **Inhalt der eingeschlossenen Fläche angeben** (13P)

Die Fläche wird von den Schaubildern von $f_1$ und $f_1'$ eingeschlossen. Als Intervallgrenzen ergeben sich damit $a = -0,5$ und $b = u$.

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-0,5}^{u} \left(f_1(x) - f_1'(x)\right) dx \\
&= \int_{-0,5}^{u} \left((x+1)\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x}\right) dx \qquad | \ \mathrm{e}^{-x} \text{ ausklammern} \\
&= \int_{-0,5}^{u} \left[\mathrm{e}^{-x} \cdot (x+1+x)\right] dx \\
&= \int_{-0,5}^{u} \left(\mathrm{e}^{-x} \cdot (2x+1)\right) dx
\end{aligned}$$

Nun muss eine Stammfunktion dieses Ausdrucks gebildet werden. Dies wird mit der Produktintegration gemacht.

$$\int u' \cdot v = u \cdot v - \int u \cdot v'$$

In unserem Fall gilt also:

$$u'(x) = \mathrm{e}^{-x} \qquad u(x) = -\mathrm{e}^{-x}$$

$$v'(x) = 2 \qquad v(x) = 2x+1$$

$$\begin{aligned}
A &= \left[-\mathrm{e}^{-x} \cdot (2x+1) - \int \left(-2\mathrm{e}^{-x}\right) dx\right]_{-0,5}^{u} \\
&= \left[-\mathrm{e}^{-x}\left(2x+1\right) - 2\mathrm{e}^{-x}\right]_{-0,5}^{u} \qquad | \ \mathrm{e}^{-x} \text{ ausklammern} \\
&= \left[\mathrm{e}^{-x} \cdot (-2x-1-2)\right]_{-0,5}^{u} \\
&= \left[\mathrm{e}^{-x} \cdot (-2x-3)\right]_{-0,5}^{u} \\
&= \mathrm{e}^{-u} \cdot (-2u-3) - \left(\mathrm{e}^{0,5} \cdot (1-3)\right) \\
&= \mathrm{e}^{-u} \cdot (-2u-3) + 2\mathrm{e}^{0,5}
\end{aligned}$$

**Auf endlichen Flächeninhalt prüfen**

Hierzu betrachten wir den Grenzwert dieses Ausdrucks für $u \to \infty$.

$$\lim_{u \to \infty} \mathrm{e}^{-u} \cdot (-2u-3) + 2\mathrm{e}^{0,5} = 2\mathrm{e}^{0,5}$$

Wir können den Term so umschreiben, dass er lautet $\dfrac{-2u-3}{\mathrm{e}^{u}} + 2\mathrm{e}^{0,5}$. Für $u \to \infty$ wächst der Nenner exponentiell, der Zähler des Buchs jedoch nur linear. Somit läuft der Bruch an sich gegen Null und es bleibt nur die Konstante $2\mathrm{e}^{0,5}$ stehen.

Für $u \to \infty$ nähert sich der Flächeninhalt des eingeschlossenen Flächenstücks dem Wert $2\mathrm{e}^{0,5}$ an.