a) **▶ Änderungsrate nach zwei Stunden berechnen** (15P)

Laut Aufgabenstellung gibt x die Zeit in Stunden und $f(x)$ die Änderungsrate der Wassermenge im Becken in Kubikmeter pro Stunde an. Die Änderungsrate nach zwei Stunden ist also gerade der Funktionswert $f(2)$.

▶ Integral berechnen und Lösungsweg dokumentieren

Du sollst den Integralterm berechnen, ohne deinen GTR zu verwenden. Nutze also den **Hauptsatz der Integralrechnung** und bilde hierzu eine **Stammfunktion** von f.

$$\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

▶ Ergebnis interpretieren

Überlege dir: Die Funktion f gibt dir die **Änderungsrate** des Wassers im Becken an. Also gibt dir das **Integral** von 0 bis 2 über $f(x)$ die **Menge an Wasser** an, die in diesen zwei Stunden **insgesamt zugeflossen** ist. Laut Aufgabenstellung war das Becken zu Beginn ($x = 0$) leer.

▶ Aussage über den Wasserstand begründen

Zu begründen ist die Aussage, dass sich nur zu Beginn kein Wasser im Becken befindet. Anders formuliert: du sollst zeigen, dass das Becken für $x > 0$ **nie** ganz leer wird. Betrachte hierzu den Graphen von f und behalte im Hinterkopf, dass f die **Änderungsrate** des Wassers im Becken angibt.

Betrachte den Graphen von f in bestimmten Abschnitten, z.B.

- zwischen $x = 0$ und $x \approx 3,6$
- zwischen $x \approx 3,6$ und $x \approx 7$
- ab $x \approx 7$

▶ Zeitlichen Anteil in Prozent berechnen

Die Wassermenge nimmt ab, wenn der Graph von f unterhalb der x-Achse verläuft. Eben haben wir die Zeitpunkte, die diesen Zeitraum begrenzen, mit $x = 3,6$ und $x = 7$ **geschätzt**. Nun gilt es, sie exakt zu berechnen. Anschließend bestimmst du den prozentualen Anteil, den diese Zeitspanne an den gesamten 8 Stunden hat.

b) **▶ Zweiten Zeitpunkt mit halber Füllung des Beckens bestimmen** (15P)

Aus der Aufgabenstellung kennst du die **Maße** des Beckens und kannst so sein **Volumen** V berechnen:

$$V = \text{Länge} \cdot \text{Breite} \cdot \text{Höhe} = 3\,\text{m} \cdot 2\,\text{m} \cdot 2\,\text{m} = 12\,\text{m}^3$$

Insgesamt fasst das Becken $12\,\text{m}^3$ Wasser; wenn es halb gefüllt ist, enthält es also $6\,\text{m}^3$. Gesucht ist nun der Zeitpunkt, zu dem der Wasserstand im Becken **zum zweiten Mal** $6\,\text{m}^3$ beträgt.

Im Aufgabenteil a) hast du mit $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ den Wasserstand im Becken nach zwei Stunden berechnet. Nun ist der Wasserstand bekannt, aber die vergangene Zeit nicht. Diese Zeit t findest du in der **oberen Integralgrenze**. Gesucht ist also die (zweite) Lösung der Gleichung:

$$\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x = 6$$

▶ Wassermengen ermitteln, die dreimal angenommen werden

Wir wollen die Funktion, welche die **Wassermenge** im Becken beschreibt, mit F bezeichnen. Sie ist eine Stammfunktion von f, für die gilt: $F(0) = 0$.

Du erkennst im GTR, dass der Graph von F einen Hochpunkt und einen Tiefpunkt besitzt. Die y-Koordinaten von Hoch- und Tiefpunkt unterteilen die Wertemenge der Funktion in drei Bereiche:

- Die Funktionswerte, die größer sind als die y-Koordinate des Hochpunkts oder kleiner als die y-Koordinate des Tiefpunkts
- Die Funktionswerte, die gleich der y-Koordinate des Tiefpunkts oder des Hochpunkts sind
- Die Funktionswerte, die zwischen der y-Koordinate von Hochpunkt und Tiefpunkt liegen

Überlege, welche dieser Funktionswerte wie oft angenommen wird und berechne mithilfe der Koordinaten von Hoch- und Tiefpunkt ein passendes Intervall, das diese Funktionswerte beschreibt.

▶ Maximale Höhe des Wasserstandes berechnen

F gibt dir die **Wassermenge** im Becken in Abhängigkeit von der Zeit an. Gesucht ist die maximale Wasserhöhe. Um sie zu berechnen, benötigst du zunächst die **maximale Wassermenge**, die sich innerhalb der ersten 8 Stunden im Becken befindet.
Du hast gerade die Koordinaten des Hochpunktes $H\,(3{,}65 \mid 8{,}14)$ des Graphen von F bestimmt. Da F aber im Intervall $[0;8]$ betrachtet wird, können auch **Randextrema** auftreten.

- Untersuche also $F(0)$ und $F(8)$ und vergleiche die Werte mit der y-Koordinate des Hochpunkts. Entscheide so, welches die maximale Wassermenge im Becken in den ersten 8 Stunden ist.
- Gesucht ist dann die zugehörige **Füllhöhe** des Beckens. Verwende hierzu die Maßangaben aus der Aufgabenstellung: Die Wassersäule im Becken hat die Form eines Quaders mit Länge 3 m, Breite 2 m unbekannter Höhe h. Berechne über die Volumenformel für Quader die Höhe h.

c) **▶ Stetigkeit und Differenzierbarkeit am Übergang nachweisen** (16P)

Die Funktion h ist an der Übergangsstelle $x = 2{,}5$ stetig und differenzierbar, wenn gilt:

- Stetig: $f(2{,}5) = g(2{,}5)$
- Differenzierbar: $f'(2{,}5) = g'(2{,}5)$

Prüfe nach ob die beiden Bedingungen erfüllt sind. Bestimme hierzu die erste Ableitung von g mithilfe der Kettenregel.

▶ Stammfunktion nachweisen

G ist eine Stammfunktion von g, wenn $G'(x) = g(x)$ ist. Leite also G nach der Kettenregel ab und vergleiche mit $g(x)$:

▶ Untersuchen, ob das Wasserbecken jemals überläuft

Du weißt, dass das Wasserbecken insgesamt $12\,\text{m}^3$ Wasser fasst. Die Funktion h beschreibt wieder die **Änderungsrate** des Wassers im Becken. Die Wassermenge zu einem Zeitpunkt t selbst wird also wieder durch die **Stammfunktion** von H bzw. durch das Integral $\int\limits_0^t h(x)\,\mathrm{d}x$ beschrieben.

Die Frage ist nun: Nimmt dieses Integral jemals einen Wert an, der größer als 12 ist? Du kannst so vorgehen:

- Bestimme zunächst den Term einer Funktion H, welche dir die Wassermenge im Becken angibt.
- Das Wörtchen „jemals“ weist auf eine **Grenzwertbetrachtung** hin. Untersuche also den Grenzwert von $H(x)$ für $x \to \infty$. Ist er kleiner oder gleich 12, so läuft das Becken nie über.

d) **▶ Identität der Geraden mit einer Tangenten begründen** (14P)

Die Gerade, die durch die Punkte $R(2{,}5 \mid 0)$ und $Q_k(5 \mid f_k(5))$ verläuft, möchten wir g_{RQ} nennen. Diese Gerade ist Tangente im Punkt Q_k, wenn

- Q_k auf der Geraden liegt. Dies ist aber bereits gegeben, weil die Gerade ja durch Q_k verläuft.

und

- Die Steigung der Geraden g_{RQ} mit der Steigung von f_k in diesem Punkt übereinstimmt.

Du kannst also so vorgehen:

- Bestimme zunächst die Steigung der Geraden g_{RQ} durch die Punkte R und Q_k.
- Berechne mit $f_k'(5)$ die **Steigung** von f_k im Punkt Q_k.
- Vergleiche die Steigung von f_k im Punkt Q_k mit der Steigung der Geraden g_{RQ}.

▶ Existenz der Wendepunkte untersuchen

Sei x_k zunächst die x-Koordinate der Wendepunkte. Sie ist noch unbekannt und muss noch bestimmt werden. Gesucht sind diejenigen Wendepunkte, bei denen die y-Koordinate fünfmal so groß ist wie die x-Koordinate. Es muss also gelten: $y_k = 5 \cdot x_k$.

Zuvor musst du aber die x-Koordinate x_k der Wendepunkte bestimmen. Für sie gilt:

- notwendige Bedingung: $f_k''(x_k) = 0$
- hinreichende Bedingung: $f_k'''(x_k) \neq 0$

Du kannst also so vorgehen:

- Bestimme zunächst die zweite und dritte Ableitung von f_k.
- Löse die Gleichung $f_k''(x) = 0$ und erhalte potentielle Wendestellen.
- Setze diese potentiellen Wendestellen ein in die dritte Ableitung $f_k'''(x)$ und untersuche das hinreichende Kriterium.
- Versuche zuletzt, die Gleichung $y_k = 5 \cdot x_k$ zu lösen. Wenn sie lösbar ist, so gibt es Wendepunkte, bei denen die y-Koordinate fünfmal so groß ist wie die x-Koordinate. Ist sie nicht lösbar, so existieren derartige Wendepunkte nicht.