1.1 ▶ Funktion f bestimmen (8P)

Gesucht ist die Funktionsgleichung der Funktion, deren Graph die äußere Profillinie des in Material 1 dargestellten Gaubenfensters beschreibt. Der Funktionsterm von f ist allgemein gegeben durch:

$f(x) = k \cdot \mathrm{e}^{a \cdot x^2}$

Dabei sind k und a die zwei gesuchten Parameter. Um zwei Unbekannte zu finden, werden genau zwei Bedingungen benötigt. Diese sind in der Aufgabenstellung genannt: Es ist vorgegeben, dass die Profillinie, also der Graph von f, durch die Punkte

$P_1(-2,53 \mid 0,835)$ und $P_2(3,57 \mid 0,39)$

verlaufen muss. Du kannst nun die Koordinaten der beiden Punkte für x und $f(x)$ in die Funktionsgleichung einsetzen und erhältst ein Gleichungssystem mit den zwei Unbekannten k und a:

I $\quad 0,835 = k \cdot \mathrm{e}^{a \cdot (-2,53)^2}$

II $\quad 0,39 = k \cdot \mathrm{e}^{a \cdot (3,57)^2}$

Löse dieses Gleichungssystem nun über das Einsetzungsverfahren. Forme dazu beispielsweise Gleichung I nach Parameter k um und setze den resultierenden Term für k in Gleichung II ein. Diese löst du dann nach Parameter a und bestimmst so den gesuchten Parameterwert für a:

$$\begin{array}{lll}
\text{Ia} & 0,835 = k \cdot \mathrm{e}^{a \cdot (-2,53)^2} & |: \mathrm{e}^{a \cdot (-2,53)^2} \\
& \dfrac{0,835}{\mathrm{e}^{a \cdot (-2,53)^2}} = k & \\
\text{II} & 0,39 = k \cdot \mathrm{e}^{a \cdot (3,57)^2} &
\end{array}$$

Setze nun $k = \dfrac{0,835}{\mathrm{e}^{a \cdot (-2,53)^2}}$ in II ein und bestimme so den Parameterwert für a:

$$\begin{array}{lll}
\text{IIa} & 0,39 = \dfrac{0,835}{\mathrm{e}^{a \cdot (-2,53)^2}} \cdot \mathrm{e}^{a \cdot (3,57)^2} = 0,835 \cdot \dfrac{\mathrm{e}^{a \cdot (3,57)^2}}{\mathrm{e}^{a \cdot (-2,53)^2}} & \\
& 0,39 = 0,835 \cdot \mathrm{e}^{a \cdot (3,57)^2 - (-2,53)^2} = 0,835 \cdot \mathrm{e}^{a \cdot 6,344} & |: 0,835 \\
& 0,467 = \mathrm{e}^{a \cdot 6,344} & |\ \ln(\,) \\
& \ln(0,467) = a \cdot 6,344 & |: 6,344 \\
& a = -0,12 &
\end{array}$$

Setze nun $a = -0,12$ in Gleichung Ia ein, um den Parameterwert für k zu bestimmen:

Ia $\quad k = \dfrac{0,835}{\mathrm{e}^{-0,12 \cdot (-2,53)^2}} = \dfrac{0,835}{0,464} \approx 1,8$

Der Funktionsterm $f(x)$ der Funktion f ergibt sich mit $a = -0,12$ und $k = 1,8$ zu:

$f(x) = 1,8 \cdot \mathrm{e}^{-0,12 \cdot x^2}$.

1.2 ▶ Allgemeingültige Formel aufstellen (6P)

Um eine allgemeingültige Formel zur Berechnung des Parameters a aufzustellen, kannst du genauso vorgehen wie in Aufgabe 1.1 und dabei lediglich auf das Berechnen konkreter Werte verzichten und die Punktkoordinaten mit $P_1(x_1 \mid y_1)$ und $P_2(x_2 \mid y_2)$ benennen.

Dann lauten die beiden Gleichungen, die wir durch Einsetzen von P_1 und P_2 erhalten, wie folgt:

I $\quad y_1 = k \cdot e^{a \cdot x_1^2}$

II $\quad y_2 = k \cdot e^{a \cdot x_2^2}$

Forme nun wieder Gleichung I nach Parameter k um und setze das Ergebnis für k in II ein, um den Parameterwert für a allgemein zu bestimmen. Es gilt also:

Ia $\quad y_1 = k \cdot e^{a \cdot x_1^2} \qquad |: e^{a \cdot x_1^2}$

$$\frac{y_1}{e^{a \cdot x_1^2}} = k$$

II $\quad y_2 = k \cdot e^{a \cdot x_2^2}$

Setze nun $k = \frac{y_1}{e^{a \cdot x_1^2}}$ in Gleichung II ein, um eine allgemeingültige Formel für Parameter a zu bestimmen:

IIa
$$y_2 = \frac{y_1}{e^{a \cdot x_1^2}} \cdot e^{a \cdot x_2^2} = y_1 \cdot \frac{e^{a \cdot x_2^2}}{e^{a \cdot x_1^2}} = y_1 \cdot e^{a \cdot x_2^2 - a \cdot x_1^2} = y_1 \cdot e^{a \cdot (x_2^2 - x_1^2)} \qquad |: y_1$$
$$\frac{y_2}{y_1} = e^{a \cdot (x_2^2 - x_1^2)} \qquad |\ln(\,)$$
$$\ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = a \cdot (x_2^2 - x_1^2) \qquad |: (x_2^2 - x_1^2)$$
$$a = \frac{\ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{(x_2^2 - x_1^2)}$$

Die allgemeingültige Formel zur Berechnung des Parameters a lautet demnach

- $a = \dfrac{\ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{(x_2^2 - x_1^2)}$ oder
- $a = \dfrac{\ln\left(\frac{y_1}{y_2}\right)}{x_1^2 - x_2^2}$,

wenn Gleichung II nach k umgeformt und in Gleichung I eingesetzt wurde.

1.3 ▶ Lage des Maximums begründen (4P)

Betrachte zunächst die Funktionsgleichung von f:

$f(x) = 1{,}8 \cdot e^{-0{,}12 \cdot x^2}$

Im Grunde handelt es sich hierbei um eine e-Funktion, mit einem negativen quadratischen Exponenten. Der Vorfaktor 1,8 streckt den Graphen der Funktion lediglich in y-Richtung und beeinflusst nicht die Lage des Maximums. Setzt man $x = 0$ in die Funktionsgleichung ein, so verschwindet der e-Term und der Faktor $-0{,}12$ ist nicht mehr von Bedeutung, da gilt:

$$f(0) = 1{,}8 \cdot e^{-0{,}12 \cdot 0^2} = 1{,}8 \cdot \underbrace{e^0}_{=1} = 1{,}8$$

Für Werte größer oder kleiner Null wird der Exponent der e-Funktion negativ, da der x-Wert durch das Quadrieren zunächst positiv wird und dann durch das negative Vorzeichen wieder negativ. Du kannst nun zeigen, dass die Funktion für $x < 0$ streng monoton steigt und für $x > 0$ streng monoton fällt. Dann liegt das Maximum in jedem Fall bei $x = 0$.

Bestimme zunächst die Steigung des Graphen von f, in dem du die erste Ableitung bildest. Benutze dabei die Kettenregel:

$$f'(x) = \underbrace{1,8e^{-0,12\cdot x^2}}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{(-0,12\cdot 2\cdot x)}_{\text{innere Ableitung}}$$
$$= -0,432\cdot x\cdot e^{-0,12\cdot x^2}$$

Für $x < 0$ gilt nun: Der e-Term bleibt in jedem Fall größer Null, der Vorfaktor wird durch das negative x positiv. Die Steigung des Graphen für negative x ist also **immer echt größer Null**. Die Kurve steigt streng monoton.

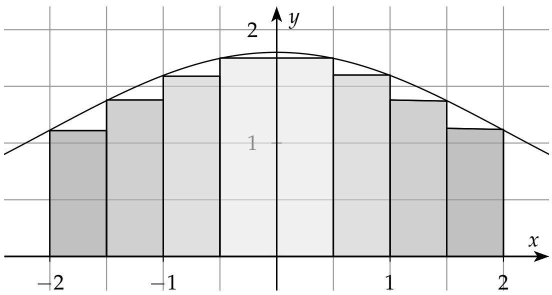
Für $x > 0$ gilt dann: Der e-Term bleibt auch hier stets positiv, der Vorfaktor dagegen ist negativ. Die Steigung des Graphen für positive x ist also **immer echt kleiner Null**. Die Kurve fällt streng monoton.

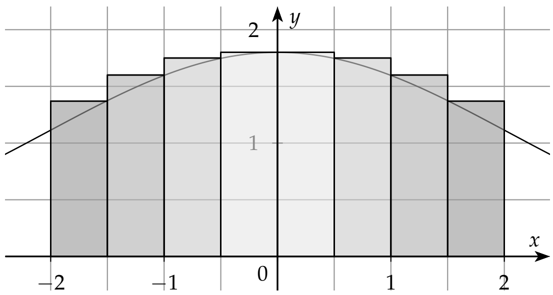
Damit ist gezeigt, dass f sein einziges Maximum an der Stelle $x = 0$ annimmt.

2.1 ▶ Flächeninhalt näherungsweise bestimmen (6P)

Gesucht ist der Inhalt der Fläche unter dem Graphen von f, der näherungsweise bestimmt werden soll. Dazu soll die Fläche in acht Streifen unterteilt werden. Da das Koordinatensystem in Metern skaliert ist und das Intervall vier Einheiten groß ist, bietet es sich an, Streifen zu nehmen, die jeweils 0,5 m breit sind und dann das Obersummen/Untersummen-Verfahren zu verwenden.

Beim Obersummen/Untersummen-Verfahren für Näherungen von Flächeninhalten stellen die Streifen Rechtecke dar, die einmal unter und einmal über der Kurve abschließen, wie in den beiden Abbildungen unten zu sehen:





Das Verfahren nähert den Inhalt der Fläche unter der Kurve durch den Mittelwert zwischen der Obersumme A_O und der Untersumme A_U. Die Formel lautet daher:

$$A_{O/U} = \frac{A_O + A_U}{2}$$

Da der Graph der Funktion symmetrisch zur y-Achse ist, haben in jeden Schaubild die jeweils farblich gleichen Rechtecke auch den gleichen Flächeninhalt, sodass wir für jede Summe nur vier Rechtecke berechnen müssen und das Ergebnis anschließend verdoppeln können. Die Breite ist für jedes der Rechtecke gleich und beträgt $b = 0,5\,\text{m}$. Die Höhen der Rechtecke sind für die Untersumme A_U gegeben durch die Funktionswerte von f bei $x_{1u} = -2$, $x_{2u} = -1,5$, $x_{3u} = -1$ und $x_{4u} = -0,5$. Für die Obersumme A_O sind dies $x_{1o} = -1,5$, $x_{2o} = -1$, $x_{3o} = -0,5$ und $x_{4o} = 0$.

Für die beiden Summen folgt dann:

$$A_U = 2 \cdot b \cdot (f(x_{1u}) + f(x_{2u}) + f(x_{3u}) + f(x_{4u}))$$
$$= 2 \cdot 0,5 \cdot (1,11 + 1,37 + 1,60 + 1,75)$$
$$= 5,83$$
$$A_O = 2 \cdot b \cdot (f(x_{1o}) + f(x_{2o}) + f(x_{3o}) + f(x_{4o}))$$
$$= 2 \cdot 0,5 \cdot (1,37 + 1,60 + 1,75 + 1,8)$$
$$= 6,52$$

Der gemittelte Wert für den Flächeninhalt ergibt dann:

$$A_{O/U} = \frac{A_0 + A_U}{2} = \frac{5,83 + 6,52}{2} = 6,175$$

Mit dem Obersummen/Untersummen-Verfahren erhält man einen genäherten Flächeninhalt von $6,175\,\mathrm{m}^2$.

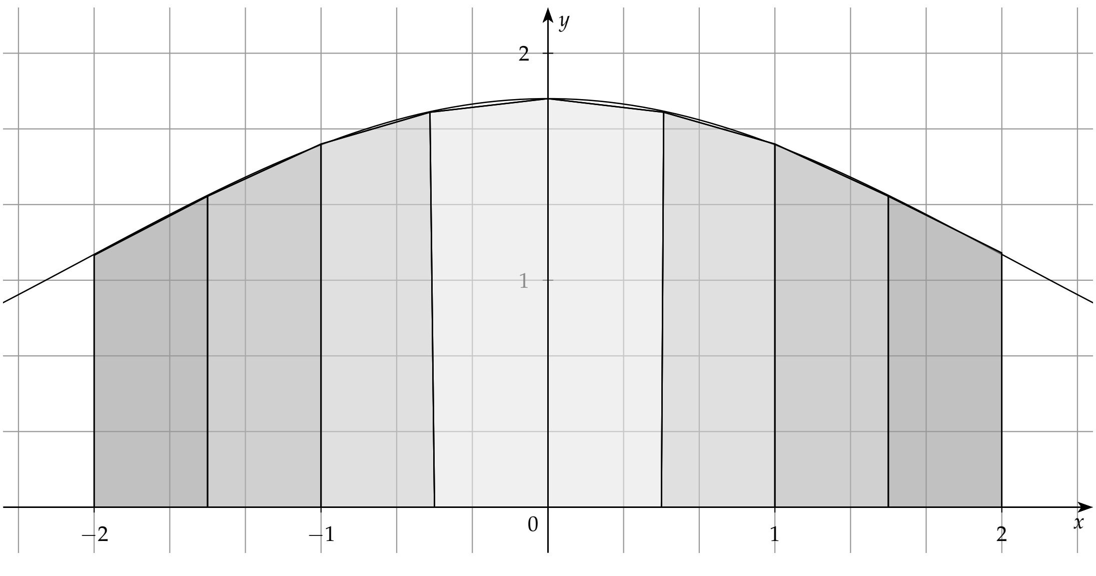
2.2 ▶ Abweichung berechnen und ein genaueres Näherungsverfahren erläutern (4P)

Um die prozentuale Abweichung w des genäherten Wertes $A_{O/U}$ von dem des Computerprogramms zu berechnen, kannst du zunächst die Differenz der beiden Werte bestimmen und anschließend durch das genauere numerische Ergebnis A_N teilen:

$$w = \frac{A_N - A_{O/U}}{A_N} = \frac{6,1966 - 6,175}{6,1966} = 0,35\,\%$$

Der genäherte Wert weicht also um $0,35\,\%$ von dem Wert ab, den das Computerprogramm berechnet.

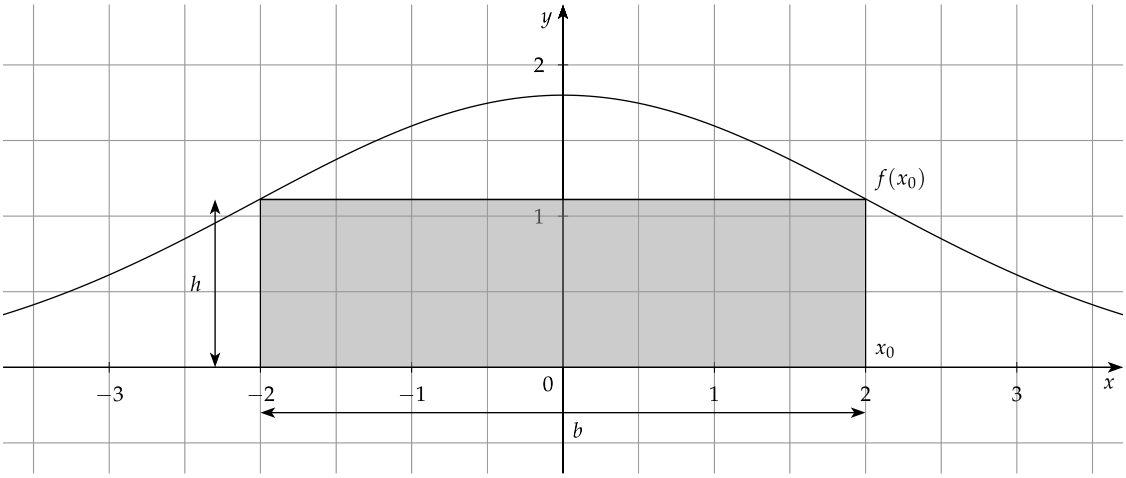
Um einen genaueren Wert zu erhalten, kannst du das Obersummen/Untersummen-Verfahren modifizieren, indem du aus den Rechtecken Trapeze machst, deren obere Seiten nicht mehr parallel zur x-Achse verlaufen, sondern so, dass die Ecken des Trapezes die Kurve berühren, wie in der Abbildung unten zu sehen:



Dieses Verfahren nennt sich das Sehnentrapez-Verfahren, da die oberen Trapezseiten Sehnen der Kurve darstellen.

3. ▶ **Maße des Fensters mit maximalem Flächeninhalt bestimmen** (7P)

Gesucht sind die Maße eines in die Profillinie eingepassten Fensters, das den größtmöglichen Flächeninhalt besitzt.



Der Flächeninhalt des abgebildeten Rechtecks beträgt

$A = b \cdot h.$

Aufgrund der Symmetrie des Graphen von f reicht es hier, wenn du nur die rechte Seite des Rechtecks betrachtest. Es gilt also $x \geq 0$ und für die Breite des Rechtecks ergibt sich dann: $b = 2 \cdot x_0$. Die Höhe des betrachteten Rechtecks berechnet sich über Funktionswert von f an der Stelle x_0: $h = f(x_0)$. Mit diesen Angaben suchen wir das Maximum einer Funktion A, die den Flächeninhalt des Rechtecks in Abhängigkeit von x darstellt mit dem folgenden Funktionsterm:

$$A(x) = b \cdot h = 2 \cdot x \cdot f(x) = 2 \cdot x \cdot 1,8 \cdot \mathrm{e}^{-0,12 \cdot x^2} = 3,6 \cdot x \cdot \mathrm{e}^{-0,12 \cdot x^2}.$$

Um das Maximum von A zu bestimmen, kannst du die Nullstellen der ersten Ableitung der Funktion bestimmen und dann mithilfe der zweiten Ableitung prüfen, ob es sich tatsächlich um ein Maximum handelt.

1. Schritt: Nullstellen der ersten Ableitung bestimmen

Für die erste Ableitung von A ergibt sich mithilfe der Produkt- und Kettenregel:

$$\begin{aligned} A'(x) &= 3,6 \cdot \mathrm{e}^{-0,12 \cdot x^2} + 3,6 \cdot x \cdot 2 \cdot x \cdot (-0,12) \cdot \mathrm{e}^{-0,12 \cdot x^2} \\ &= 3,6 \cdot \mathrm{e}^{-0,12 \cdot x^2} - 0,864 \cdot x^2 \cdot \mathrm{e}^{-0,12 \cdot x^2} \\ &= (3,6 - 0,864 \cdot x^2) \cdot \mathrm{e}^{-0,12 \cdot x^2} \end{aligned}$$

Die Nullstellen von A' erhältst du nun, wenn du $A'(x) = 0$ setzt und nach x auflöst:

$$\begin{aligned} A'(x) &= 0 \\ (3,6 - 0,864x^2) \cdot \mathrm{e}^{-0,12 \cdot x^2} &= 0 && \text{Der e-Term ist stets positiv, daher folgt mit dem Satz vom Nullprodukt:} \\ 3,6 - 0,864x^2 &= 0 && \mid -3,6 \\ -0,864 \cdot x^2 &= -3,6 && \mid : (-0,864) \\ x^2 &= 4,167 && \mid \sqrt{} \\ x_1 &= 2,04 \\ x_2 &= -2,04 \end{aligned}$$

Wir erhalten zwei mögliche Maxima bei $x_1 \approx 2,04$ und $x_2 \approx -2,04$. Wie oben schon erwähnt, werden hier nur die Werte für $x \geq 0$ betrachtet, weshalb die potentielle Extremstelle bei $x_2 = -2,04$ nicht weiter beachtet werden muss.

2. Schritt: Mögliche Maximumsstellen auf hinreichende Bedingung prüfen

Prüfe nun, ob an der Stelle x_1 tatsächlich eine Maximalstelle von A vorliegt, indem du den Funktionswert der zweiten Ableitung von A an dieser Stelle bestimmst. Ist dieser negativ, so handelt es sich bei der untersuchten Stelle tatsächlich um ein Maximum von A:

$$\begin{aligned} A''(x) &= -2 \cdot 0,864 \cdot x \cdot \mathrm{e}^{-0,12 \cdot x^2} + (3,6 - 0,864 \cdot x^2) \cdot (-0,12 \cdot 2 \cdot x) \cdot \mathrm{e}^{-0,12 \cdot x^2} \\ &= -1,728 \cdot x \cdot \mathrm{e}^{-0,12 \cdot x^2} + (3,6 - 0,864 \cdot x^2) \cdot (-0,24 \cdot x) \cdot \mathrm{e}^{-0,12 \cdot x^2} \\ &= -1,728 \cdot x \cdot \mathrm{e}^{-0,12 \cdot x^2} - 0,864 \cdot x \cdot \mathrm{e}^{-0,12 \cdot x^2} + 0,207 \cdot x^3 \cdot \mathrm{e}^{-0,12 \cdot x^2} \\ &= -2,592 \cdot x \cdot \mathrm{e}^{-0,12 \cdot x^2} + 0,207 \cdot x^3 \cdot \mathrm{e}^{-0,12 \cdot x^2} \\ &= \left(-2,592 \cdot x + 0,207 \cdot x^3\right) \cdot \mathrm{e}^{-0,12 \cdot x^2} \end{aligned}$$

Setze nun $x_1 = 2,04$ in den Term der zweiten Ableitungsfunktion, um feststellen zu können, ob an dieser Stelle wirklich das Maximum liegt:
$A''(x_1) = \left(-2,592 \cdot 2,04 + 0,207 \cdot 2,04^3\right) \cdot \mathrm{e}^{-0,12 \cdot 2,04^2} = -3,53 \cdot 0,607 \approx -2,14.$

Die zweite Ableitung an der Extremstelle x_1 ist negativ, damit handelt es sich in jedem Fall um ein lokales Maximum der Flächenfunktion A. Dass es sich dabei auch um das globale Maximum handelt, kannst du feststellen, wenn du die Werte der Funktion für $|x| \to \infty$ und $|x| \to 0$ betrachtet. Für sehr große $|x|$ läuft der e-Term in $A(x)$ gegen Null, da der Exponent dort immer negativ ist. Das Rechteck wird also sehr breit, aber dafür sinkt die Höhe auf nahezu Null. Für sehr kleine $|x|$ wird das Rechteck sehr schmal und kann damit auch nicht den maximalen Flächeninhalt besitzen. Daraus folgt: Das lokale Maximum ist auch das globale.

Die Maße des Fensters mit dem maximalen Flächeninhalt sind demnach

$b = 2 \cdot 2,04\,\mathrm{m} = 4,08\,\mathrm{m}$ und $h = f(2,04) = 1,1\,\mathrm{m}$

und es ergibt sich ein Flächeninhalt $A = 4,08 \cdot 1,1\,\mathrm{m}^2 = 4,49\,\mathrm{m}^2$, der maximal ist, weil sich das globale Maximum der Flächenfunktion bei $x = 2,04$ befindet.

4. ▸ **Begründen, dass alle Wendepunkte auf Parallelen zur y-Achse liegen** (5 P)

Gesucht ist die Ortskurve h der Wendepunkte der Funktionenschar

$f_k(x) = k \cdot \mathrm{e}^{-\frac{3}{25}x^2}$

mit $k > 0$. Zu zeigen ist, dass h durch Parallelen zur y-Achse dargestellt werden kann, wie in Material 4 gezeigt.

Um die Gleichung der Ortskurve zu ermitteln, kannst du zunächst die Wendepunkte der Kurven von f_k ermitteln und anschließend ihre Lage im Koordinatensystem betrachten.

Für Wendestellen einer Funktion f_k gilt:

- Die zweite Ableitung f_k'' ist gleich Null. (notwendige Bedingung)
- Die dritte Ableitung f_k''' ist ungleich Null. (hinreichende Bedingung)

Bilde also zunächst die zweite und dritte Ableitungen von f_k, bestimme dann die Nullstellen von f_k'' und prüfe dann, ob die hinreichende Bedingung $f_k''' \neq 0$ erfüllt ist.

Für f_k'' und f_k''' ergibt sich durch Anwendung der Produkt- und der Kettenregel:

$$\begin{aligned}
f_k(x) &= k \cdot \mathrm{e}^{-0,12 \cdot x^2} \\
f_k'(x) &= -0,24 \cdot k \cdot x \cdot \mathrm{e}^{-0,12 \cdot x^2} \\
f_k''(x) &= -0,24k \cdot \mathrm{e}^{-0,24 \cdot x^2} - 0,12 \cdot k \cdot x \cdot (-0,12) \cdot 2x \cdot \mathrm{e}^{-0,12 \cdot x^2} \\
&= k \cdot (-0,24 + 0,0576 \cdot x^2)\mathrm{e}^{-0,12 \cdot x^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_k'''(x) &= k \cdot 2 \cdot 0,0576 \cdot x \cdot \mathrm{e}^{-0,12 \cdot x^2} + k \cdot (-0,24 + 0,0576 \cdot x^2) \cdot (-0,12 \cdot 2 \cdot x) \cdot \mathrm{e}^{-0,12 \cdot x^2} \\
&= 0,115kx \cdot \mathrm{e}^{-0,12 \cdot x^2} + (-0,24k + 0,0576k \cdot x^2) \cdot (-0,24) \cdot x \cdot \mathrm{e}^{-0,12 \cdot x^2} \\
&= k(0,115x + 0,0576x - 0,014x^3)\mathrm{e}^{-0,12 \cdot x^2} \\
&= k(0,1726x - 0,014x^3)\mathrm{e}^{-0,12 \cdot x^2}
\end{aligned}$$

Bestimme nun die Nullstellen der zweiten Ableitung:

$$\begin{aligned}
f_k''(x) &= 0 \\
k \cdot (-0,24 + 0,0576 \cdot x^2)\mathrm{e}^{-0,12 \cdot x^2} &= 0 && \text{Mit dem Satz vom Nullprodukt folgt:} \\
-0,24 + 0,0576 \cdot x^2 &= 0 && \mid +0,24 \\
0,0576 \cdot x^2 &= 0,24 && \mid : 0,0576 \\
x^2 &= 4,167 && \mid \sqrt{} \\
x_{1,2} &\approx \pm 2,04
\end{aligned}$$

Die möglichen Wendestellen liegen damit bei $x_1 \approx 2,04$ und $x_2 \approx -2,04$. Die dritten Ableitungen an diesen Stellen ergeben jeweils:

$$\begin{aligned}
f_k'''(x_1) &= k \cdot 0,14 \\
f_k'''(x_2) &= k \cdot (-0,14)
\end{aligned}$$

Da $k > 0$ gilt, ist die dritte Ableitung von f_k an den Stellen x_1 und x_2 nicht Null und damit sind diese beiden Stellen Wendestellen von f_k.

Für die y-Koordinaten der Wendepunkte ergibt sich durch Einsetzen in den Funktionsterm:

$$f_k(x_1) = f_k(x_2) = k \cdot 0,61$$

Die Wendepunkte des Graphen von f_k liegen damit in den Punkten $P_{k+}(2,04 \mid 0,61k)$ und $P_{k-}(-2,04 \mid 0,61k)$.

Da die x-Koordinaten der Wendepunkte nicht von k abhängen, die y-Koordinaten dagegen schon, liegen die Punkte auf Parallelen zur y-Achse durch $x_1 = 2,04$ und $x_2 = -2,04$: