1.1 ► Prüfung der Aussagen (8P)

In der Abbildung ist das Schaubild von h zu sehen. Ihre Stammfunktion ist H und h' und h'' sind ihre Ableitungsfunktionen. Du kannst erkennen, dass das Schaubild im Definitionsbereich

- zwei Extrema aufweist: einen Hochpunkt bei $(0|4)$ und einen Tiefpunkt bei $(3|0)$,
- einen Wendepunkt etwa bei $x = 1.5$ besitzt und
- im Intervall $[-7;3]$ rechtsgekrümmt und im Intervall $[3;4]$ linksgekrümmt ist.

Mithilfe dieser Angaben kannst du nun Aussagen über die Stamm- und Ableitungsfunktionen treffen.

1.2.1 ► Schaubild von *s* (6P)

Das Schaubild von s ist C. Zeichne das Schaubild im Intervall $[-3;7]$, achte dabei auf den richtigen Maßstab und die korrekte Achsenbeschriftung.

► Werte der Steigungsfunktion

Die Steigung von C lässt sich mithilfe der ersten Ableitung von s bestimmen. Diese lautet:

$$s(x) = \frac{1}{2}x + 1 + 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) \qquad \sin'(x) = \cos(x) \rightarrow \text{Leite mit der Kettenregel ab:}$$

$$s'(x) = \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$$

$$\boldsymbol{s'(x) = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)}$$

Du kannst erkennen, dass die Funktion eine periodische Cosinus-Funktion darstellt. Der Cosinus kann nur Werte zwischen 1 und -1 annehmen, dies bedeutet, dass der minimale Wert, den die Steigung von C haben kann, dann eintritt, wenn

$$(1) \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) = -1$$

gilt und der maximale Wert eintritt, wenn

$$(2) \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) = 1$$

gilt.

Setze die beiden Bedingungen in die Funktionsgleichung von s' ein und ermittle die Werte, die die Steigung annehmen kann.

1.2.2 ► Nachweis, dass die Gerade *g* das Schaubild *C* bei $x = -2$ und $x = 6$ berührt (12P)

In einem Berührpunkt zweier Schaubilder stimmen sowohl die Funktionswerte der zugehörigen Funktionen als auch ihre Steigungen überein.

Für die übereinstimmenden Funktionswerte folgen für die Berührstellen bei $x = -2$ und $x = 6$ die Gleichungen:

(1a) $s(-2) = g(-2)$

(1b) $s(6) = g(6)$

Die Steigungen der Schaubilder sind durch ihre Ableitungsfunktionen definiert. Die Werte dieser Funktionen sollen an den besagten Stellen ebenso übereinstimmen. Daraus folgen die weiteren Bedingungen:

(2a) $s'(-2) = g'(-2)$

(2b) $s'(6) = g'(6)$

Zeige nun durch Einsetzen der Funktionsterme und Vereinfachen, dass diese Bedingungen erfüllt sind.

► Nachweis, dass C nie unterhalb von g verläuft

Es soll gezeigt werden, dass das Schaubild von s nie unter der Geraden g verläuft. Dies wäre dann der Fall, wenn der Funktionswert von s an einer Stelle x kleiner wäre als der Funktionswert von g an dieser Stelle.

Die Ungleichung

$s(x) < g(x)$

darf demnach keine Lösung haben.

Setze die Funktionsterme ein und löse nach x auf.

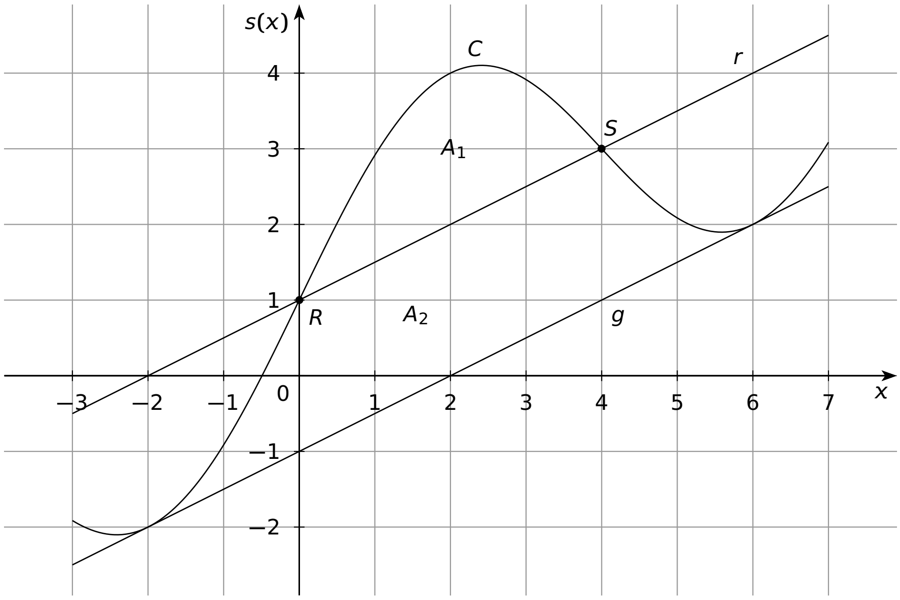
► Flächeninhalt der größeren Teilfläche

Gesucht ist der Inhalt einer Fläche, die zwischen g, C und der Parallelen r zu g durch den Punkt $R(0\,|\,1)$ begrenzt ist. Um sich diese besser vorstellen zu können, ist eine Skizze sinnvoll.

Die Funktionsgleichung von r unterscheidet sich dabei von der Gleichung von g nur im y-Achsenabschnitt. Durch die Parallelität bleibt die Steigung $0,5$ erhalten. Der Abschnitt befindet sich wegen R bei $c = 1$:

$r(x) = 0,5x + 1.$

Die Skizze kann infolgedessen so aussehen:



Da nicht bekannt ist, welche der beiden Schnittflächen die Größere ist, bestimmen wir zunächst die Gesamtfläche A und dann den Inhalt von A_1. Aus der Differenz

$$A - A_1 = A_2$$

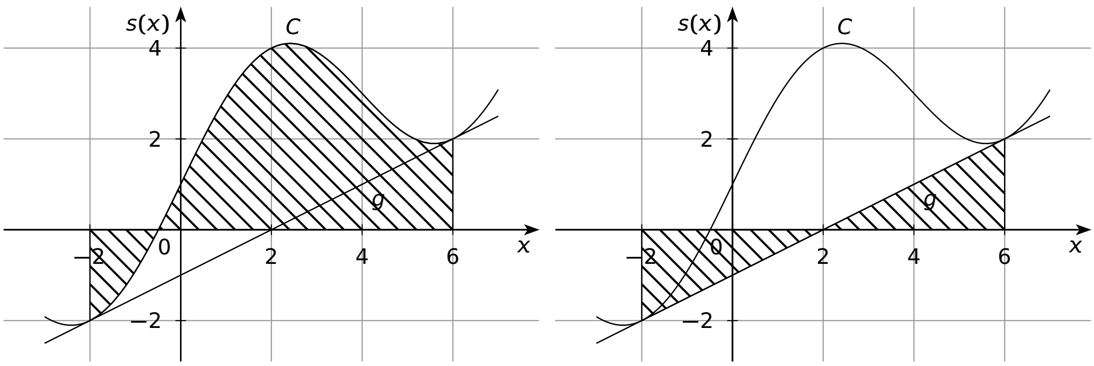
können wir herauslesen, welche Fläche gefragt ist.

Die Gesamtfläche A ist - wie wir in der Skizze erkennen können - im Intervall zwischen den beiden Berührstellen von g und C eingeschlossen, dieses lautet dann:

$$[-2; 6].$$

Flächen unter Kurven können durch den Betrag des Integrals über das Intervall bestimmt werden, innerhalb dessen sie sich bewegen.

Bilden wir das Integral von s im betrachteten Intervall $[-2; 6]$, so ergibt sich die Fläche wie links in der Zeichnung. Bilden wir das Integral von g im betrachteten Intervall, ergibt sich die Fläche in der rechten Zeichnung:



Zieht man diese Flächen voneinander ab und bildet den Betrag, ergibt sich die gesuchte Gesamtfläche A:

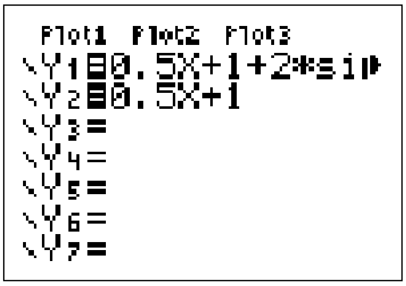
$$A = \left| \int_{-2}^{6} (s(x) - g(x))\ \mathrm{d}x \right|$$

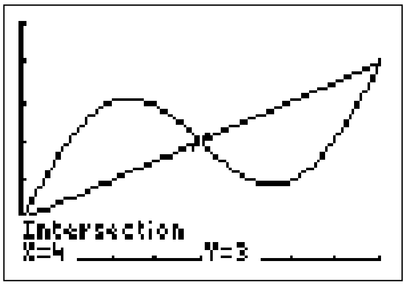
Der Flächeninhalt von A_1 wird ebenfalls über eine solche Differenz bestimmt. Jedoch ist A_1 nicht zwischen C und g, sonder zwischen C und r eingeschlossen. Das Intervall, innerhalb dessen sich die gesuchte Fläche befindet, ist durch die Schnittpunkte R und S der beiden Schaubilder bestimmt.

R liegt bei $x = 0$, für S gilt:

$s(x) = r(x)$.

Durch graphisches Lösen dieser Gleichung mit dem GTR ergibt sich die obere Grenzen des Intervalls zu





$x = 4$.

Für den Inhalt der Fläche A_1 folgt daraus analog zu A:

$$A_1 = \left| \int_{0}^{4} (s(x) - r(x))\ \mathrm{d}x \right|$$

Berechne nun die beiden Inhalte mithilfe des GTR und bilde schließlich ihre Differenz, um den Inhalt der größeren Fläche angeben zu können.

1.2.3▶ **Wendepunkte von C** (6P)

In Wendepunkten wird die Steigung einer Funktion extremal. Die Steigung einer Funktion wird durch ihre erste Ableitung definiert, in unserem Fall s'.

In einem Extremum von s' ist die Steigung der Funktion gleich Null. Die Steigung von s' wird wiederum durch die Ableitung s'' der Funktion s' gegeben. Diese wird im einem Extremum Null, es folgt daraus die notwendige Bedingung für Wendepunkte:

$s''(x) = 0$

An einem Maximum der Steigung findet zudem ein Vorzeichenwechsel der Steigung statt. Ist die dritte Ableitung von s ungleich 0, so ist dies erfüllt. Wir prüfen also diese hinreichende Bedingung nach:

$s'''(x) \neq 0$

Bilde die entsprechenden Ableitungen von s und bestimme die Wendepunkte von C.

▶ Begründung, dass alle Wendepunkte auf einer Geraden liegen

Wenn alle Wendepunkte auf einer Geraden liegen, muss ihre Ortskurve die Form

$y = mx + c$

aufweisen. Ist dies erfüllt, ist der Nachweis erbracht.
Die Ortskurve kannst du bilden, in dem du zunächst die Koordinaten als Gleichungen der Form $x = \ldots$ und $y = \ldots$ formulierst:

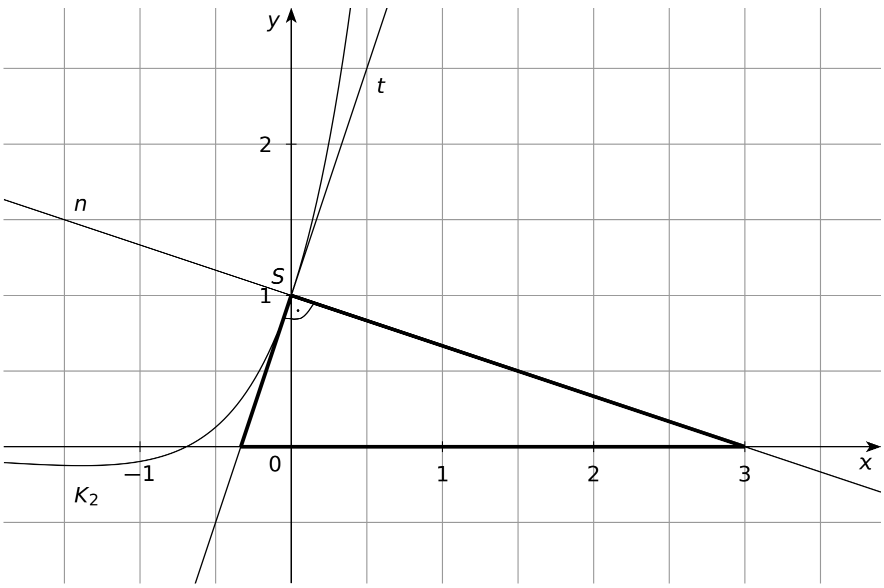
(1) $x = 4n$,

(2) $y = 2n + 1$.

Wenn du die erste Gleichung nach n auflöst und das Ergebnis in (2) einsetzt, erhältst die Gleichung der Ortskurve der Wendepunkte von C.

1.3.1▶ **Länge der Hypotenuse** (4P)

Die Tangente t und die Normale n von K_2 schließen mit der x-Achse ein Dreieck ein, dessen Hypotenuse bestimmt werden soll.
Eine Tangente an einer Kurve durch den Punkt $S(0\,|\,1)$ hat die Steigung der Kurve in diesem Punkt. Die Normale im gleichen Punkt steht senkrecht auf die Tangente. Es ergibt sich also in jedem Fall ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel in S.
Eine Skizze verdeutlicht die Situation:



Du kannst erkennen, dass die Länge der Hypotenuse gerade dem Abstand der Nullstellen von t und n entspricht. Wir müssen also die Schnittpunkte der Normalen und Tangenten mit der x-Achse bestimmen. Dazu müssen wir

- zunächst die Gleichungen der Tangente und der Normalen aufstellen,
- anschließend ihre Nullstellen bestimmen
- und schließlich den Abstand dieser Stellen berechnen.

1.3.2► Achsenschnittpunkte von K_a (4P)

Schnittpunkte mit der x-Achse haben generell die y-Koordinate Null. Für die Funktionswerte von f_a gilt dort daher:

$f_a(x) = 0.$

Schnittpunkte mit der y-Achse haben generell die x-Koordinate Null. Die Koordinaten eines Punktes von K_a auf der y-Achse lauten damit allgemein:

$C\,(0\,|\,f_a(0)).$

Es sind also zwei Arbeitsschritte notwendig:

1. Löse die Gleichung nach x auf und bestimme die x-Koordinaten der Schnittpunkte mit x-Achse.

2. Bestimme $f_a(0)$ und damit die y-Koordinate mit der y-Achse.

► Werte von a, für die der Schnittpunkt mit der x-Achse rechts von der y-Achse liegt

Wenn ein Punkt rechts von der y-Achse liegt, weist er immer positive x-Koordinaten auf. Der Schnittpunkt N mit der x-Achse liegt also dann rechts von der x-Achse, wenn

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) > 0$$

gilt. Löse die Gleichung nach den gesuchten Werten für a auf.

1.3.3► Wert von a (5P)

Gesucht ist der Parameter a in der Funktionsgleichung von f_a. Gegeben ist das Schaubild der Stammfunktion F_a von f_a. Wir können also aus dem Schaubild von F_a Informationen über f_a gewinnen, da f_a die erste Ableitung und damit die Steigung von F_a definiert.
Im Schaubild kannst du erkennen, dass bei $x = 0$ ein Minimum der Steigung eintritt. Die Steigung f_a ist dort also gleich Null. Damit gilt die Gleichung

$f_a(0) = 0.$

Löse die Gleichung nach a auf.

► Funktionsterm von F_1

Die Gleichung einer Stammfunktion einer Funktion f_1 erhält man durch Integration dieser Funktion nach x und Addition eines Parameters C:

$$F_1(x) = \int f_1(x)\,\mathrm{d}x + C.$$

Du kannst im Schaubild einen Punkt ablesen, durch den der Graph verläuft und den Parameter C dann über eine Punktprobe bestimmen.