2.1 ▶ Bestimmung der Funktionsgleichung (6P)

Die gesuchte Funktion f ist eine Polynomfunktion 4. Grades. Die allgemeine Gleichung einer solchen Funktion lautet:

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

Zudem ist die gesuchte Funktion symmetrisch zur y-Achse. Dies bedeutet, dass in der Funktionsgleichung nur gerade Exponenten vorhanden sein dürfen. Diese eliminieren die negativen Vorzeichen bei allen x-Werten, sodass die y-Achse zur Spiegelachse der Kurve wird.
Daher kannst du die allgemeine Funktionsgleichung bereits anpassen:

$f(x) = ax^4 + cx^2 + e$

Es bleiben noch die drei Unbekannten a, c und e. Um sie herauszufinden, werden drei Gleichungen mit diesen Parametern benötigt. Diese ergeben sich aus den drei Bedingungen im Aufgabentext:

1. Das Schaubild schneidet die y-Achse im Punkt $S(0\,|\,2)$.
2. Das Schaubild hat an der Stelle $x = 1$ die Steigung $f'(1) = -4$.
3. Das Schaubild hat einen Extrempunkt an der Stelle $x = \sqrt{2}$

2.2.1 ▶ Nachweis, dass f_6 für $x > \sqrt{12}$ streng monoton wächst (4P)

Ein Funktion wächst innerhalb eines bestimmten Intervalls streng monoton, wenn deren Ableitung in diesem Intervall stets positiv ist.
Streng monotones Wachstum setzt damit auch voraus, dass das Vorzeichen der Steigung im betrachteten Intervall nicht wechseln darf. Ein solcher Wechsel findet immer an Extrempunkten statt. An diesen Punkten ist die Steigung gleich Null. Für das Intervall $]\sqrt{12}; \infty[$ darf die Ableitung von f_6 daher nie Null werden.

2.2.2 ▶ Schaubild der Funktion (7P)

Achte bei deinem Schaubild auf die richtige Achsenskalierung und Achsenbeschriftung. Achte darauf, dass alle relevanten Punkte im Schaubild zu sehen sind.

▶ Berechnung der Schnittpunkte der Wendetangenten

Wendetangenten sind Geraden, die die Wendepunkte eines Schaubildes tangieren. Um die Schnittpunkte der Wendetangenten von K_6 mit der x-Achse zu bestimmen, müssen zunächst die Koordinaten der Wendepunkte K_6 bestimmt werden. Danach stellt man mithilfe der jeweiligen Steigung in diesen Punkten die Geradengleichungen der Wendetangenten auf. Schließlich müssen diese noch durch Gleichsetzung des Funktionsterms mit Null mit der x-Achse geschnitten werden.

2.2.3 ▶ Berechnung der Integrale (6P)

Die Berechnung der Integrale mithilfe des GTR erfolgt über zwei Arbeitsschritte:

1. Eingabe der Funktionsgleichungen in den `Y=`-Editor.
2. Bestimmung des Integrals über die Befehlskette `MATH→9`. Die Funktionsgleichungen setzt du über `VARS→Y-VARS` in das Integral ein. Einen Betrag setzt du über `MATH → NUM → 1`.

▶ Geometrische Bedeutung

Integrale innerhalb bestimmter Intervalle stellen immer den Inhalt der Fläche zwischen Kurve und x-Achse dar. Dabei ist das Integral positiv, wenn sich die Kurve im positiven y-Bereich befindet und negativ, wenn sie im negativen y-Bereich liegt. Geometrisch ausgedrückt: Befindet die Fläche über der x-Achse, wird sie als positiv betrachtet, befindet sie sich darunter, als negativ.

Die geometrische Bedeutung der Integrale sagt daher etwas darüber aus, wie groß der Inhalt der durch die Integration abgedeckten Flächen ist. Um festzustellen, welche diese sind, ist es ratsam die Graphen der Funktionen im GTR in ein gemeinsames Schaubild zu zeichnen.

2.2.4 ► Gleichung der Ortskurve der Tiefpunkte von K_t bestimmen (7P)

Die Kurve, auf der die Tiefpunkte aller K_t liegen, wird durch ihre Koordinaten in Abhängigkeit von t bestimmt. Aus den Koordinaten ergibt sich durch die Eliminierung des Parameters t eine von t unabhängige Gleichung der Ortskurve.

2.3.1 ► Entstehung von G_a aus dem Schaubild von h (4P)

g_a ist eine trigonometrische, periodische Funktion, ebenso wie h. g_a entsteht dabei aus h durch den Koeffizienten a vor dem Cosinus, den Faktor 2 im Cosinus und den Parameter $+4$. Diese drei Konstanten lassen G_a aus dem Schaubild von h entstehen.

► Angabe der Werte für a, für die G_a im positiven y-Bereich verläuft

Damit das Schaubild im positiven y-Bereich verläuft, muss allgemein gelten:

$g_a(x) > 0$

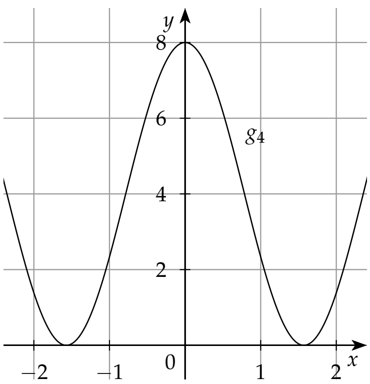
Die Ausdehnung des Schaubildes einer trigonometrischen Funktion in y-Richtung ist abhängig von seiner y-Achsenverschiebung und der Amplitude A. Für G_a beträgt die y-Achsenverschiebung $+4$, dies bedeutet: Wenn der Cosinus Null wird, befindet sich die Kurve bei $y = 4$.

Der Cosinus kann Werte zwischen -1 und 1 annehmen. Bei -1 ist die maximale negative Elongation des Schaubildes erreicht. Diese ist gleich der Amplitude $A = a$.

2.3.2 ► Bestimmung des Inhalts der eingeschlossenen Fläche (4P)

Um den Inhalt der Fläche, die G_4 mit der x-Achse im Intervall $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ einschließt, zu bestimmen, muss das Integral von g_4 in diesem Intervall gebildet werden. Da der Flächeninhalt *exakt* bestimmt werden soll, sind Näherungen mit dem GTR nicht zulässig.

Zunächst ist daher eine Skizze sinnvoll:



Aus dem Schaubild wird sichtbar, dass die Intervallgrenzen dort liegen, wo die Kurve die x-Achse berührt. Dies bedeutet, dass die gesamte zu bestimmende Fläche im positiven y-Bereich liegt. Daher kann im kompletten Intervall durchintergriert werden.

2.3.3 ► **Nachweis des Verhältnisses der Flächeninhalte** (7P)

Dem Flächenstück aus 2.3.3 werden bestimmte Rechtecke einbeschrieben, deren Umfang und Flächeninhalt bestimmt werden muss. Zuerst müssen die Rechtecke mit dem jeweils kleinsten und größten Umfang bestimmt werden, dann soll das Verhältnis ihrer Flächeninhalte berechnet werden. Dazu muss der Umfang als Funktion in Abhängigkeit von x dargestellt werden.

Die Grundseite der Rechtecke liegt auf der x-Achse und einer der Eckpunkte liegt auf der Kurve im ersten Quadranten. Durch die y-Achsensymmetrie des Schaubildes gilt für ein solches Rechteck somit folgendes Schaubild: