a) (1) ▶ **Bestimmen des Definitionsbereichs der Funktionen f_a** (7BE)

Die Funktionenschar f_a ist eine Schar gebrochenrationaler Funktionen. Deine Aufgabe ist es hier, den Definitionsbereich $\mathbb{D}$ dieser Funktionenschar zu bestimmen.

Da f_a eine gebrochenrationale Funktionenschar ist, untersuchst du diese beim Bestimmen des Definitionsbereichs $\mathbb{D}$ auf Definitionslücken. Betrachte dazu den Nenner des Funktionsterms von f_a.

Nenner: $x - a$.

Da eine Division durch Null eine Definitionslücke zur Folge hat, muss diese aus dem Definitionsbereich $\mathbb{D}$ von f_a ausgeschlossen werden. Die Funktionenschar f_a besitzt also eine Definitionslücke da, wo:
$x = a$
gilt.

Es ergibt sich hier also dieser Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \{x | x \in \mathbb{R}, x \neq a\}$ bzw. $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{a\}$.

(2) ▶ **Begründen, dass $x = a$ eine Polstelle ist**

Hier sollst du nun begründen, dass $x = a$ eine Polstelle der Funktionenschar f_a ist. Teile dazu zunächst den gebrochenrationalen Funktionsterm der Funktion f_a in Zähler- und Nennerfunktion auf:

Zählerfunktion: $Z_a(x) = (x - 3 \cdot a)^2$.
Nennerfunktion: $N_a(x) = x - a$.

Um die Polstelle bei $x = a$ richtig zu begründen zu können, gehst du im Folgenden auf die Definitionslücke von f_a bei $x = a$ eingehen.

An der Stelle $x = a$ gilt $N_a(a) = 0$, wobei $Z_a(a) \neq 0$ mit $a > 0$ gilt. Damit ist der Funktionsterm an der Stelle $x = a$ nicht definiert und die Schar f_a besitzt bei $x = a$ eine Polstelle.

(3) ▶ **Bestimmen der Gleichung der schrägen Asymptoten**

Deine Aufgabe ist es hier, die Gleichung der schrägen Asymptoten y der Scharfunktion f_a zu bestimmen. Diese Funktionsgleichung bestimmst du über folgende zwei Schritte:

1. Schritt: Zerlegen des Funktionsterm von f_a mittels Polynomdivision.
2. Schritt: Bestimmen des Grenzwerts der Zerlegung.

1. Schritt:

$$
\begin{array}{l}
\left(\quad x^2 - 6ax + 9a^2\right) : \left(x - a\right) = x - 5a + \dfrac{4a^2}{x-a} \\
\underline{-x^2 \;\; + ax} \\
\qquad -5ax + 9a^2 \\
\qquad \underline{\;\;\; 5ax - 5a^2} \\
\qquad\qquad\quad 4a^2
\end{array}
$$

2. Schritt:

Betrachtet wird also diese Summe: $x - 5 \cdot a + \dfrac{4 \cdot a^2}{x - a}$.

Bilde nun den Grenzwert für $x \to \infty$ dieser Summe, um die Gleichung der schrägen Asymptote y der Scharfunktion f_a zu bestimmen:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x - 5\cdot a + \frac{4\cdot a^2}{x-a}\right) = \underbrace{x}_{\to\infty} - 5\cdot a + \underbrace{\frac{4\cdot a^2}{x-a}}_{\to 0}$$

Bei dieser Grenzwertbetrachtung strebt der gebrochenrationale Teil des betrachteten Terms gegen Null, während der lineare Teil gegen Unendlich strebt. Die Gleichung der schrägen Asymptoten y der Scharfunktion f_a ergibt sich also zu:

$y = x - 5\cdot a.$

b) (1) ▶ **Ermitteln der Koordinaten und Art der lokalen Extrempunkte des Graphen von f_a** (13BE)

Extremstellen befinden sich da, wo die erste Ableitungsfunktion der jeweiligen betrachteten Funktion Nullstellen besitzt (notwendige Bedingung). Dabei wird über die zweite Ableitungsfunktion der betrachteten Funktion die Art der jeweiligen Extrema festgestellt (hinreichende Bedingung). Für eine Beispielextremstelle bei x_E kann also gelten:

- $f''(x_E) < 0 \implies$ Bei x_E befindet sich ein Maximum.
- $f''(x_E) > 0 \implies$ Bei x_E befindet sich ein Minimum.

Gehe also beim Bestimmen der Koordinaten und der Art der lokalen Extrempunkte der Graphen von f_a so vor:

1. Schritt: Nullstellen der ersten Ableitungsfunktion f_a'.
2. Schritt: Überprüfen der hinreichenden Bedingung bei den im 2. Schritt bestimmten Extremstellen.
3. Schritt: Berechnen der y - Koordinaten der bestimmten Extremstellen.

1. Schritt:

Den Term der ersten Ableitungsfunktion f_a' von f_a kannst du der Aufgabenstellung entnehmen, dieser ist:

$$f_a'(x) = \frac{x^2 - 2\cdot a\cdot x - 3\cdot a^2}{(x-a)^2}.$$

Setze den Funktionsterm f_a' gleich Null, um die Extremstellen von f_a zu bestimmen:

$$f_a'(x) = 0$$

$$0 = \frac{x^2 - 2\cdot a\cdot x - 3\cdot a^2}{(x-a)^2} \qquad |\ \cdot(x-a)^2 \text{ (da } (x-a)^2 \neq 0 \text{ gelten muss)}$$

$$0 = x^2 - 2\cdot a\cdot x - 3\cdot a^2$$

$$
\begin{aligned}
x_{1,2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\
x_{1,2} &= \frac{2\cdot a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2\cdot a}{2}\right)^2 + 3\cdot a^2} \\
x_{1,2} &= 1\cdot a \pm \sqrt{a^2 + 3\cdot a^2} \\
x_{1,2} &= 1\cdot a \pm \sqrt{4\cdot a^2} \\
x_{1,2} &= 1\cdot a \pm 2\cdot a \\
x_1 &= 3\cdot a \\
x_2 &= -a
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
x_{1,2} &= \frac{2\cdot a \pm \sqrt{(-2\cdot a)^2 - 4\cdot 1\cdot(-3\cdot a^2)}}{2\cdot 1} \\
x_{1,2} &= \frac{2\cdot a \pm \sqrt{4\cdot a^2 + 12\cdot a^2}}{2} \\
x_{1,2} &= \frac{2\cdot a \pm 4\cdot a}{2} \\
x_1 &= 3\cdot a \\
x_2 &= -a
\end{aligned}
$$

Die Extremstellen von f_a befinden sich also bei: $x_{E_1} = 3\cdot a$ und $x_{E_2} = -a$.

2. Schritt:

Bevor du die hinreichende Bedingung bei x_{E_1} und x_{E_2} überprüfen kannst kannst, ermittelst du den Term der zweiten Ableitungsfunktion f_a'' von f_a mittels der Quotientenregel:

$$
\begin{aligned}
f_a'(x) &= \frac{x^2 - 2\cdot a\cdot x - 3\cdot a^2}{(x-a)^2} \\
f_a''(x) &= \frac{(2\cdot x - 2\cdot a)\cdot(x-a)^2 - (x^2 - 2\cdot a\cdot x - 3\cdot a^2)\cdot 2\cdot(x-a)}{(x-a)^4} \\
f_a''(x) &= \frac{(x-a)\cdot\left((2\cdot x - 2\cdot a)\cdot(x-a) - (x^2 - 2\cdot a\cdot x - 3\cdot a^2)\cdot 2\right)}{(x-a)^4} \\
f_a''(x) &= \frac{2\cdot x^2 - 2\cdot a\cdot x - 2\cdot a\cdot x + 2\cdot a^2 - 2\cdot x^2 + 4\cdot a\cdot x + 6\cdot a^2}{(x-a)^3} \\
f_a''(x) &= \frac{8\cdot a^2}{(x-a)^3}
\end{aligned}
$$

Setze nun $x_{E_1} = 3\cdot a$ und $x_{E_2} = -a$ in den Funktionsterm der zweiten Ableitungsfunktion f_a'' ein, um die hinreichende Bedingung an den Extremstellen zu überprüfen:

$$
\begin{aligned}
f_a''(3\cdot a) &= \frac{8\cdot a^2}{(3\cdot a - a)^3} \\
&= \frac{8\cdot a^2}{8\cdot a^3} \\
&= \frac{1}{a}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_a''(-a) &= \frac{8\cdot a^2}{(-a-a)^3} \\
&= \frac{8\cdot a^2}{-8\cdot a^3} \\
&= -\frac{1}{a}
\end{aligned}
$$

- Da $f_a''(x_{E_1}) > 0$ gilt, befindet sich bei $x_{E_1} = 3\cdot a$ ein Minimum.
- Da $f_a''(x_{E_2}) < 0$ gilt, befindet sich bei $x_{E_2} = -a$ ein Maximum.

3. Schritt:

Die zu x_{E_1} und x_{E_2} zugehörigen y - Koordinaten bestimmst du, indem du die Extremstellen in den Funktionsterm von f_a einsetzt:

$$
\begin{aligned}
f_a(x_{E_1}) &= \frac{(3\cdot a - 3\cdot a)^2}{3a - a} = \frac{0^2}{2\cdot a} = 0 \\
f_a(x_{E_2}) &= \frac{(-a - 3\cdot a)^2}{-a - a} = \frac{(-4\cdot a)^2}{-2\cdot a} = -8\cdot a
\end{aligned}
$$

Die Koordinaten der Extrempunkte sind also:

$\Longrightarrow$ Hochpunkt bei $H_a\,(-a \mid -8\cdot a)$.

$\Longrightarrow$ Tiefpunkt bei $T_a\,(3\cdot a \mid 0)$.

(2) ▶ **Begründen, dass keiner der Graphen einen Wendepunkt besitzt**

Eine Funktion besitzt eine Wendestelle da, wo die zweite Ableitungsfunktion der betrachteten Funktion Nullstellen besitzt (notwendige Bedingung). Weiterhin gilt für die dritte Ableitungsfunktion der jeweiligen Funktion an einer Wendestelle x_W:
$f'''(x_W) \neq 0$.

Willst du nun zeigen, dass keiner der Graphen der Scharfunktion f_a einen Wendepunkt besitzt, so zeigst du, dass f_a die oben genannten Bedingungen für eine Wendestelle nicht erfüllt.

Überprüfen der notwendigen Bedingung:

Setze den Funktionsterm von f_a'' gleich Null, um potentielle Wendestellen zu bestimmen:

$$\begin{aligned} f_a''(x) &= 0 \\ 0 &= \frac{8\cdot a^2}{(x-a)^3} \qquad \mid \cdot(x-a)^3 \text{ da } (x-a)^3 \neq 0 \text{ gelten muss.} \\ 0 &\neq 8\cdot a^2 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Da $a > 0$ gilt (siehe Aufgabenstellung) besitzt die zweite Ableitungsfunktion f_a'' von f_a keine Nullstellen und folglich besitzen die Graphen von f_a keine Wendepunkte.

(3) ▶ **Bestimmen der Gleichung der Geraden, auf der die lokalen Hochpunkte liegen**

Gesucht ist hier die Ortskurve o der Hochpunkte des Graphen von f_a. Der Aufgabenstellung kannst du dabei entnehmen, dass alle lokalen Hochpunkte von f_a auf einer Geraden liegen.
Möchtest du diese Geradengleichung nun bestimmen, so stellst du die x - Koordinate zunächst nach Parameter a um. Hast du die x - Koordinate nach a umgestellt, so setzt du diese in die von a abhängige y - Koordinate des Hochpunkts H_a ein.

Umstellen der x - Koordinaten des Hochpunkts H_a nach Parameter a

$x_{H_a} = -a \;\Leftrightarrow\; a = -x_{H_a}$

Einsetzen der nach a umgestellten x - Koordinaten in die y - Koordinate von H_a

$y_{H_a} = -8\cdot(-x) \;\Leftrightarrow\; y = 8\cdot x.$

Die Ortskurve o, auf welcher alle Hochpunkte der Graphen von f_a liegen, ergibt sich also zu:

$o(x) = 8\cdot x.$

c) ▶ **Angeben für welche Werte von a die jeweiligen Graphen gezeichnet worden sind** (3BE)

Das in der Aufgabenstellung gegebene Schaubild zeigt verschiedene Graphen der Scharfunktion f_a. Deine Aufgabe ist es nun, für diese Graphen die jeweiligen Parameterwerte des Parameters a zu bestimmen.

Betrachtest du die Graphen G_{I}, G_{II} und G_{III} genauer, so kannst du erkennen, dass die Lage des Tiefpunkts der jeweiligen Graphen klar zu erkennen ist:

- $T_{G_{\mathrm{I}}}(2 \mid 0)$.
- $T_{G_{\mathrm{II}}}(4 \mid 0)$.
- $T_{G_{\mathrm{III}}}(6 \mid 0)$.

Im vorhergegangenen Aufgabenteil hast du bestimmt, dass die Koordinaten des Tiefpunkts T_a von f_a in Abhängigkeit von a so lauten: $T_a(3 \cdot a \mid 0)$.

Setzt du nun die x - Koordinate der oben genannten Tiefpunkte von G_{I}, G_{II} und G_{III} mit der von a abhängigen x - Koordinaten von T_a gleich, so kannst du die zu G_{I}, G_{II} und G_{III} zugehörigen Parameterwerte bestimmen:

- $G_{\mathrm{I}} : 3 \cdot a = 2 \;\Leftrightarrow\; a_{G_{\mathrm{I}}} = \dfrac{2}{3}$.
- $G_{\mathrm{II}} : 3 \cdot a = 4 \;\Leftrightarrow\; a_{G_{\mathrm{II}}} = \dfrac{4}{3}$.
- $G_{\mathrm{III}} : 3 \cdot a = 6 \;\Leftrightarrow\; a_{G_{\mathrm{III}}} = 2$.

d) ► **Zeichnen aller Asymptoten und den Graphen von f_1 für $a = 1$** (6BE)

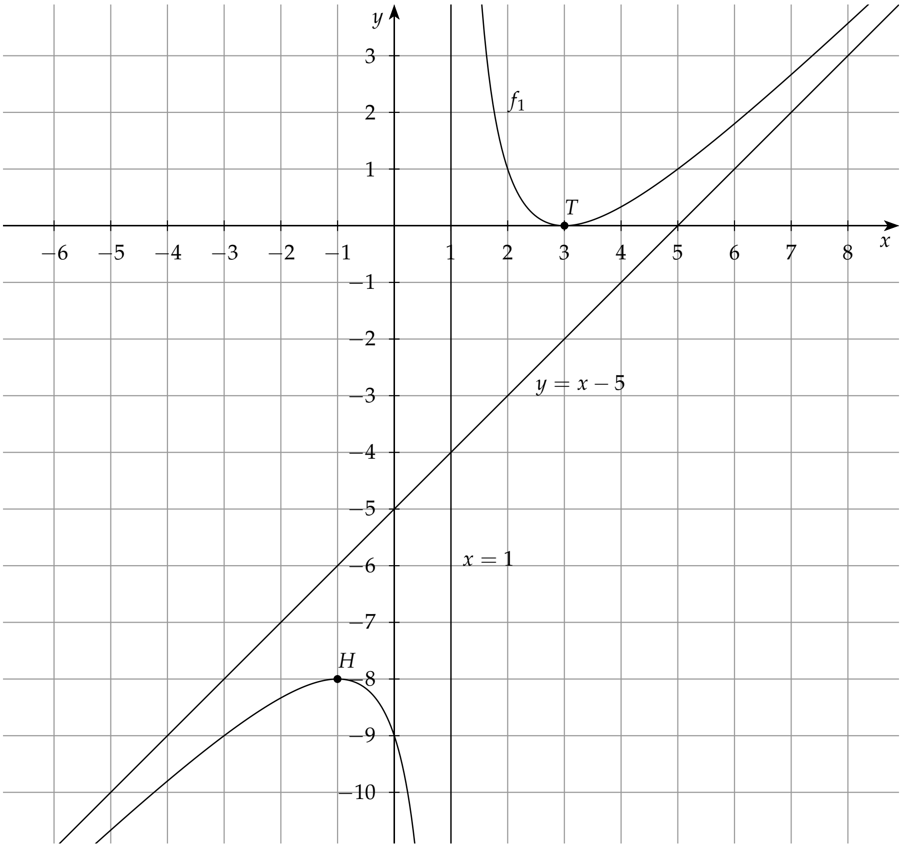
Zu Zeichen sind hier:

- Graph von f_1 mit $f_1(x) = \dfrac{(x-3)^2}{x-1}$.
- Asymptote an den Graphen von f_1 mit $y = x - 5$.
- Polgerade $x = 1$.

Beim Zeichnen des Graphen von f_1 kann es außerdem hilfreich sein, wenn du dich an den Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von f_1 orientierst. Deren Koordinaten sind:

- $H_1\,(-1 \mid -8)$.
- $T_1\,(3 \mid 0)$.

Deine Zeichnung sollte hier so aussehen:



e) (1) ► **Zeigen, dass der Funktionsterm wie in der Aufgabenstellung dargestellt werden kann** (6BE)

Willst du zeigen, dass der in der Aufgabenstellung gegebene Funktionsterm dem Funktionsterm von f_1 entspricht, so fasst du den gegebenen Funktionsterm so zusammen, dass dieser wieder gerade dem von f_1 entspricht.

Gehe dabei wie hier dargestellt vor:

$$x - 5 + \frac{4}{x-1} = \frac{(x-5)\cdot(x-1)}{x-1} + \frac{4}{x-1} = \frac{x^2 - x - 5\cdot x + 5 + 4}{x-1}$$
$$\frac{x^2 - 6\cdot x + 9}{x-1} = \frac{(x-3)^2}{x-1} = f_1(x)$$

(2) ► **Überprüfen, ob der Fläche ein endlicher Flächeninhalt zugeordnet werden kann**

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass der Graph von f_1, die Gerade mit der Gleichung $y = x - 5$ sowie die Senkrechte $x = 3$ eine Fläche einschließen, welche ins Unendliche reicht. Deine Aufgabe ist es dabei zu überprüfen ob der eben beschriebenen Fläche ein endlicher Flächeninhalt zugeordnet werden kann.

Der oben beschriebene Flächeninhalt berechnet sich über ein Integral. Die untere Grenze des Integral bildet dabei die Senkrechte bei $x = 3$, es gilt also $x_0 = 3$. Die obere Grenze des Integrals reicht bis ins Unendliche, für diese nimmst du zunächst eine Variable an, es könnte also $x_1 = g$ gelten. Da der Graph von f_1 im gesamten betrachteten Intervall oberhalb der Geraden mit der Gleichung $y = x - 5$ verläuft (siehe d)), gilt also für den zu berechnenden Flächeninhalt A:

$$A(g) = \int_{x_0}^{x_1} (f_1(x) - y)\ \mathrm{d}x = \int_3^g (f_1(x) - (x-5))\ \mathrm{d}x \text{ mit } g > 3.$$

Im Folgenden wird $f_1(x) = x - 5 + \dfrac{4}{x-1}$ als Funktionsterm der Funktion f_1 verwendet.

Berechne das oben beschriebene Integral zunächst mit g als unbekannter fester oberer Grenze des Integrals:

$$A(g) = \int_3^g (f_1(x) - (x-5))\ \mathrm{d}x = \int_3^g \left(x - 5 + \frac{4}{x-1} - (x-5)\right)\ \mathrm{d}x = \int_3^g \left(\frac{4}{x-1}\right)\ \mathrm{d}x$$

$$= [4 \cdot \ln|x-1|]_3^g$$

$$= (4 \cdot \ln|g-1|) - (4 \cdot \ln|3-1|)$$

$$= 4 \cdot (\ln|g-1| - \ln(2))$$

$$= 4 \cdot \left(\ln|g-1| \cdot \frac{1}{\ln(2)}\right)$$

$$= 4 \cdot \ln\left|\frac{g-1}{2}\right|$$

Um nun zu untersuchen, ob dem in der Aufgabenstellung beschriebenen Flächeninhalt A ein endlicher Wert zugeordnet werden kann, bildest du hier den Grenzwert für $g \to \infty$ und verschiebst damit die obere Integralsgrenze ins Unendliche:

$$\lim_{g\to\infty} \left(4 \cdot \ln\left|\frac{g-1}{2}\right|\right) = 4 \cdot \underbrace{\ln\left|\frac{g-1}{2}\right|}_{\to\infty} \to \infty.$$

$\Longrightarrow$ Da der Flächeninhalt für $g \to \infty$ ins Unendliche strebt, kann dem Flächeninhalt der beschriebenen Fläche kein reeller Wert zugeordnet werden.

f) ▶ **Modellierung der Gleisverbindung durch eine ganzrationale Funktion** (5BE)

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass die beiden Graphenteile von f_1 Bestandteile eines Eisenbahnnetzes sind. Dabei soll zwischen den beiden Extrempunkten des Graphen von f_1 eine neue Gleisverbindung gebaut werden. Weiterhin soll der Übergang zu der durch f_1 modellierten Strecke an beiden Punkten jeweils „ohne Knick“ erfolgen, was bedeutet, dass die zu modellierende Funktion in beiden Punkten den gleichen Anstieg wie f_1 besitzen muss.
Deine Aufgabe ist es nun, eben diese neue Gleisverbindung durch eine ganzrationale mit möglichst geringem Grad zu modellieren.

Wie oben schon beschrieben, soll der Graph der zu modellierenden Funktion h durch die Extrempunkte des Graphen von f_1 bei

- $H_1(-1 \mid -8)$
- $T_1(3 \mid 0)$

verlaufen und dabei soll dieser Übergang „ohne Knick" erfolgen, das heißt, dass h in diesen Punkten die gleiche Steigung wie f_1 besitzen muss. Es ergeben sich also insgesamt vier Bedingungen an die Modellierungsfunktion h, was zu Folge hat, dass diese mindestens einen Grad von 3 besitzen muss.

Die allgemeine Form des Funktionsterms einer ganzrationalen Funktion dritten Grades ist: $h(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d.$

Um Parameter $a,\ b,\ c$ und d zu ermitteln bedarf es hier also insgesamt vier Bedingungen an die Modellierungsfunktion h. Zwei dieser Bedingungen ergeben sich aus der Forderung, dass der Graph von h durch die Punkte H_1 und T_1 verlaufen soll:

I $\;h(-1) = -8 = a \cdot (-1)^3 + b \cdot (-1)^2 + c \cdot (-1) + d$

II $\;h(3) \quad = \quad 0 = a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + c \cdot 3 + d$

Weiterhin soll h bei $x_H = -1$ und $x_T = 3$ die gleiche Steigung wie f_1 besitzen. Da es sich bei $x_H = -1$ und $x_T = 3$ um Extremstellen handelt, liegt hier eine Steigung von Null vor. Leite h also zuerst in Abhängigkeit von $a,\ b,\ c$ und d ab und bilde anschließend die zwei weiteren Bedingungen an die Modellierungsfunktion h:

$h'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$

III $\;h'(-1) = 0 = 3 \cdot a \cdot (-1)^2 + 2 \cdot b \cdot (-1) + c$

IV $\;h'(3) \quad = 0 = 3 \cdot a \cdot 3^2 + 2 \cdot b \cdot 3 + c$

Es ergibt sich also dieses Gleichungssystem:

I $\quad -8 = -a + b - c \cdot (-1) + d$

II $\quad 0 = 27 \cdot a + 9 \cdot b + 3 \cdot c + d$

III $\quad 0 = 3 \cdot a - 2 \cdot b + c$

IV $\quad 0 = 27 \cdot a \cdot +6 \cdot b + c$

Löse dieses lineare Gleichungssystem nun mit Hilfe des Additionsverfahrens:

$$\begin{array}{ll}
\text{I} & -8 = -a + b - c + d \\
\text{II} & 0 = 27 \cdot a + 9 \cdot b + 3 \cdot c + d \\
\text{III} & 0 = 3 \cdot a - 2 \cdot b + c \\
\text{IV} & 0 = 27 \cdot a \cdot +6 \cdot b + c \qquad III - IV \\
\hline
\text{I} & -8 = -a + b - c + d \\
\text{II} & 0 = 27 \cdot a + 9 \cdot b + 3 \cdot c + d \\
\text{III} & 0 = -24 \cdot a - 8 \cdot b \;\Leftrightarrow\; b = -3 \cdot a \\
\text{IV} & 0 = 27 \cdot a \cdot +6 \cdot b + c \qquad III \text{ in } IV \\
\hline
\text{I} & -8 = -a + b - c + d \\
\text{II} & 0 = 27 \cdot a + 9 \cdot b + 3 \cdot c + d \\
\text{III} & b = -3 \cdot a \\
\text{IV} & 0 = 27 \cdot a \cdot +6 \cdot (-3 \cdot a) + c \;\Leftrightarrow\; c = -9 \cdot a \qquad III \text{ und } IV \text{ in } II \\
\hline
\text{I} & -8 = -a + b - c + d \\
\text{II} & 0 = 27 \cdot a + 9 \cdot (-3 \cdot a) + 3 \cdot (-9 \cdot a) + d \;\Leftrightarrow\; d = 27 \cdot a \\
\text{III} & b = -3 \cdot a \\
\text{IV} & c = -9 \cdot a \qquad III;\ IV \text{ und } II \text{ in } I \\
\hline
\text{I} & -8 = -a - 3 \cdot a + 9 \cdot a + 27 \cdot a \;\Leftrightarrow\; -8 = 32 \cdot a \;\Leftrightarrow\; a = -\frac{1}{4} \\
\text{II} & d = 27 \cdot a \\
\text{III} & b = -3 \cdot a \\
\text{IV} & c = -9 \cdot a \qquad I \text{ in } II;\ III \text{ und } IV \\
\hline
\text{I} & a = -\frac{1}{4} \\
\text{II} & d = -\frac{27}{4} \\
\text{III} & b = \frac{3}{4} \\
\text{IV} & c = \frac{9}{4}
\end{array}$$

$\Longrightarrow$ Der Funktionsterm der Modellierungsfunktion h dritten Grades ergibt sich also zu:

$$h(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^3 + \frac{3}{4} \cdot x^2 + \frac{9}{4} \cdot x - \frac{27}{4}.$$