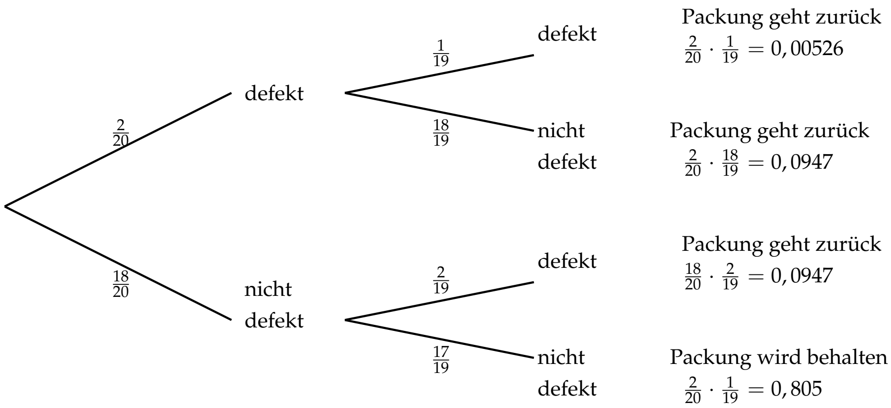
1.1 ► Überprüfungsverfahren grafisch darstellen (5BE)

In einer Packung von 20 Sticks befinden sich 2 defekte Sticks. Es werden nun 2 Sticks **ohne Zurücklegen** gezogen. Ist einer der beiden defekt, so wird die Packung zurückgeschickt.

Die Wahrscheinlichkeit für einen defekten Stick beim ersten Ziehen liegt also bei $\frac{2}{20}$, die für einen nicht defekten Stick bei $\frac{18}{19}$.

Beim zweiten Ziehen passt sich die Wahrscheinlichkeit entsprechend an. Somit ergibt sich folgendes Baumdiagramm.



1.2 ► Wahrscheinlichkeit berechnen (4BE)

1. Teil: Packung mit zwei Sticks

In einer Packung mit insgesamt 20 Sticks befinden sich 2 defekte Sticks. Dies ist genau die Situation, die du eben im Baumdiagramm dargestellt hast. Der Händler behält die Packung nur, wenn **beide Sticks in Ordnung sind**. Im Baumdiagramm kannst du erkennen, dass dies mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{18}{20} \cdot \frac{17}{19} = 0,805$ passiert.

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $80,5\%$ behält der Händler eine Packung mit zwei defekten Sticks.

2. Teil: Packung mit vier Sticks

Nun kommen in einer Packung mit insgesamt 20 Sticks genau vier defekte Sticks vor. Es wird wie oben **zwei Mal ohne Zurücklegen gezogen**. Die Packung wird behalten, wenn **beide Sticks in Ordnung** sind.

Die Wahrscheinlichkeit für einen nicht defekten Stick im ersten Zug liegt bei $\frac{16}{20}$ und im zweiten Zug bei $\frac{15}{19}$. Nach der Pfadregel ergibt sich also die Wahrscheinlichkeit für zwei nicht defekte Sticks von $\frac{16}{20} \cdot \frac{15}{19} = 0,6316$.

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $63,16\%$ behält der Händler eine Packung mit vier defekten Sticks.

3. Teil: Packung mit sechs Sticks

Nun enthält die Packung sechs defekte Sticks. Also wird ein nicht defekter Stick beim ersten Zug mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{14}{20}$ und beim zweiten Zug mit $\frac{13}{19}$ gezogen. Nach der Pfadregel ergibt sich wieder die Wahrscheinlichkeit für zwei nicht defekte Sticks von $\frac{14}{20} \cdot \frac{13}{19} = 0,4789$.

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $47,89\%$ behält der Händler eine Packung mit sechs defekten Sticks.

1.3 ▶ **Anzahl der defekten Sticks ermitteln** (4BE)

Die Wahrscheinlichkeit, eine Packung mit 20 Sticks nach der Überprüfung zu behalten, soll **weniger als** 25% **betragen**. Eine Packung wird behalten, wenn **beide geprüften Sticks** nicht defekt sind.

Sei also x die Anzahl der **defekten Sticks** und folglich $(20 - x)$ die Anzahl der **nicht** defekten Sticks. Berechne die Wahrscheinlichkeit wie oben nach der Pfadregel.
Es muss gelten:

$$\begin{aligned}
\frac{20-x}{20} \cdot \frac{19-x}{19} &< 0,25 \\
\frac{(20-x)\cdot(19-x)}{20\cdot 19} &< 0,25 \\
\frac{380-19x-20x+x^2}{380} &< 0,25 && \mid \cdot 380 \\
x^2 - 39x + 380 &< 95 && \mid -95 \\
x^2 - 39x + 285 &< 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= \frac{39}{2} \pm \sqrt{\frac{1521}{4} - 285} = 19,5 \pm \sqrt{380,25 - 285} \\
&= 19,5 \pm \sqrt{95,25} = 19,5 \pm 9,76
\end{aligned}$$

Es ergeben sich die Lösungen $x_1 > 9,74$ und $x_2 < 29,26$. Eine Packung muss als **mindestens** 10 defekte Sticks und darf **höchstens** 29 defekte Sticks enthalten, damit sie mit einer Wahrscheinlichkeit von weniger als 25% behalten wird. Da eine Packung aber insgesamt nur 20 Sticks enthält, fällt die obere Grenze weg.

Eine Packung muss mindestens 10 defekte Sticks enthalten, damit sie nach der Überprüfung mit einer Wahrscheinlichkeit von weniger als 25% behalten wird.

1.4 ▶ **Bedeutung der Gleichungen im Sachzusammenhang erklären** (4BE)

1. Gleichung

Im Zähler des Bruchs wird mit $\binom{16}{2}$ die Anzahl der Möglichkeiten bestimmt, aus 16 Sticks genau 2 zu ziehen. Da vorausgesetzt wurde, dass eine Packung genau 4 defekte und folglich 16 nicht defekte Sticks enthält, wird hier im Zähler also die Anzahl der Möglichkeiten bestimmt, 2 **nicht defekte** Sticks zu ziehen.
Im Nenner hingegen wird allgemein die Anzahl der Möglichkeiten bestimmt, aus allen 20 Sticks der Packung 2 Sticks zu ziehen.

Nach dem Prinzip $\frac{\text{Günstige}}{\text{Mögliche}}$ wird hier also die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmt, aus einer Packung **genau zwei nicht defekte Sticks** zu ziehen.

Diese Wahrscheinlichkeit beträgt $63,2\%$.

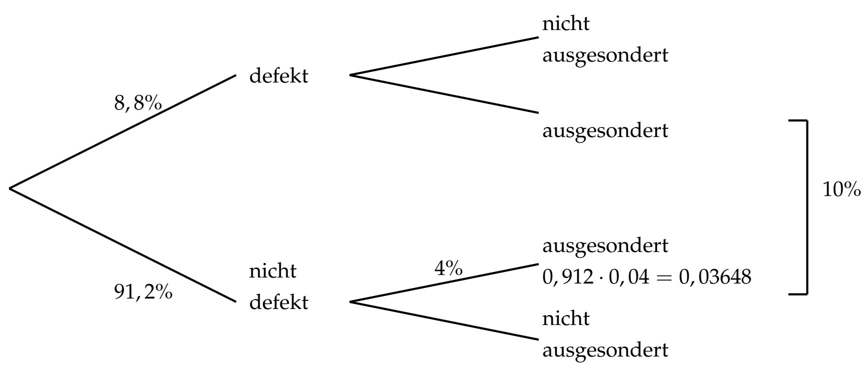
2. Gleichung

Hier taucht die Wahrscheinlichkeit aus der ersten Gleichung wieder auf. Es war die Wahrscheinlichkeit, genau 2 nicht defekte Sticks zu ziehen. In der Aufgabenstellung wurde vorhin gesagt, dass eine Packung **behalten** wird, wenn die zwei gezogenen Sticks beide in Ordnung sind. Damit wird auch mit einer Wahrscheinlichkeit von $63,2\%$ eine Packung behalten, die vier defekte Sticks enthält.

In der zweiten Gleichung wird nun eine Zufallsvariable X eingeführt, die mit $n = 50$ und $p = 0,632$ binomialverteilt ist. Diese Zufallsvariable zählt die **Packungen mit vier defekten Sticks, die behalten werden**. Es wird mit $P(X = 30)$ die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmt, dass von 50 Packungen mit je 4 defekten Sticks genau 30 behalten werden. Diese Wahrscheinlichkeit beträgt $10,27\%$.

2.1 ▶ Zusammenhänge in einem Baumdiagramm darstellen (5BE)

$8,8\%$ aller produzierten USB-Sticks sind defekt. Damit sind $91,2\%$ aller USB-Sticks in Ordnung. Ein einwandfreier Stick wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 4% ausgesondert. Insgesamt liegt für jeden Stick die Wahrscheinlichkeit, ausgesondert zu werden, bei 10%.



▶ Wahrscheinlichkeit berechnen (4BE)

Sei D das Ereignis „Ein Stick ist defekt“ und A das Ereignis „Ein Stick wird ausgesondert“.

Gesucht ist nun die **bedingte Wahrscheinlichkeit**, dass ein Stick ausgesondert wird, unter der Bedingung, dass er defekt ist, also $P_D(A)$. Diese bedingte Wahrscheinlichkeit berechnet sich über die Formel $P_D(A) = \frac{P(D\cap A)}{P(D)}$.

$91,2\%$ aller USB-Sticks sind **nicht defekt** und diese werden mit einer Wahrscheinlichkeit von 4% ausgesondert. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein USB-Stick **nicht** defekt ist und ausgesondert wird, liegt also bei $0,912 \cdot 0,04 = 0,03648$.
Dies ist die Wahrscheinlichkeit $P(\overline{D} \cap A)$.

Insgesamt werden 10% aller Sticks ausgesondert, d.h. $P(A) = 0,1$. Diese Wahrscheinlichkeit setzt sich zusammen aus $P(\overline{D} \cap A)$ und $P(D \cap A)$. Es gilt also:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\overline{D} \cap A) + P(D \cap A) && \mid P(A) = 0,1, \quad P(\overline{D} \cap A) = 0,03648 \\ 0,1 &= 0,03648 + P(D \cap A) && \mid -0,03648 \\ 0,06352 &= P(D \cap A) \end{aligned}$$

Weiterhin ist bekannt, dass 8,8% aller USB-Sticks defekt sind. Damit ist $P(D) = 0,088$.

Nun kennst du alle Wahrscheinlichkeiten, die notwendig sind, um $P_D(A)$ zu berechnen. Setze sie in die Gleichung ein:

$$P_D(A) = \frac{P(D \cap A)}{P(D)} \qquad \mid P(D \cap A) = 0,06352, \quad P(D) = 0,0088$$

$$P_D(A) = \frac{0,06352}{0,088} = 0,72\overline{18} \approx 0,722$$

Ein defekter USB-Stick wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 72,2% ausgesondert.

2.3 ► Wahrscheinlichkeit berechnen (4BE)

Jetzt dreht sich die Bedingung um: Gefragt ist nach der Wahrscheinlichkeit, dass ein Stick defekt ist, unter der Bedingung dass er aussortiert wurde, d.h. $P_A(D)$. Nach der Formel gilt wieder: $P_A(D) = \frac{P(A \cap D)}{P(A)}$.

Da $P(A \cap D) = P(D \cap A)$, gilt $P(A \cap D) = 0,06352$.

$P(A)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Stick ausgesondert wird. Diese liegt bei 10%, d.h. $P(A) = 0,1$. Eingesetzt in die Formel ergibt dies:

$$P_A(D) = \frac{P(A \cap D)}{P(A)} \qquad \mid P(A \cap D) = 0,06352, \quad P(A) = 0,1$$

$$P_A(D) = \frac{0,06352}{0,1} = 0,6352$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 63,52% ist ein ausgesonderter Stick tatsächlich defekt.