

a) ► **Einzeichnen von P und Q in die Grafik**

(11P)

Berechne zunächst die **Koordinaten** des Punktes P . Anschließend kannst du die Punkte P und Q in das Koordinatensystem **einzeichnen**.

Der Punkt P ist folgendermaßen in der Aufgabenstellung angegeben: $P(0,25|f(0,25))$

Damit dieser in die Grafik eingezeichnet werden kann, musst du zuerst die vollständigen Koordinaten berechnen. Dafür kannst du die x -Koordinate des Punktes in die Funktionsgleichung von f **einsetzen**.

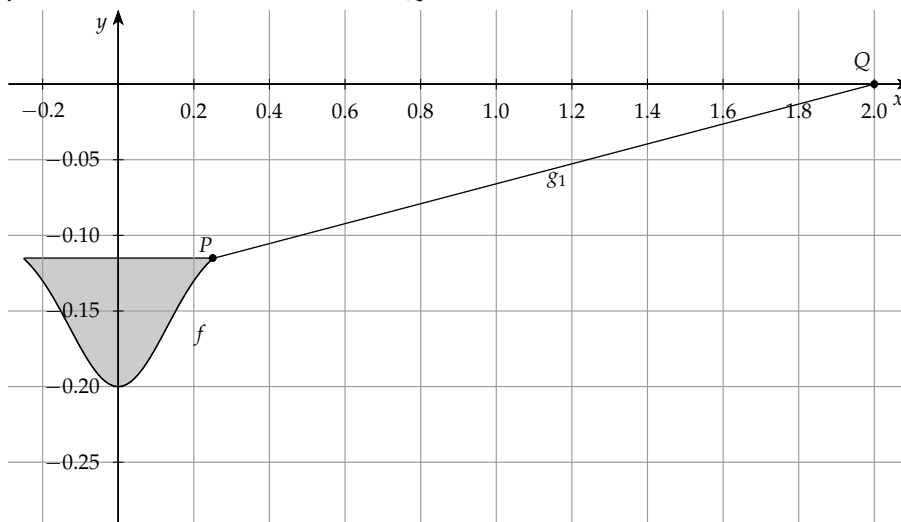
$$f(x) = -\frac{1}{10}(1 + e^{-30 \cdot x^2}) \quad | \quad x = 0,25$$

$$f(0,25) = -\frac{1}{10}(1 + e^{-30 \cdot 0,25^2})$$

$$f(0,25) \approx -0,115$$

Die **Koordinaten des Punktes P** sind: $P(0,25| -0,115)$

Jetzt kannst du die Punkte P und Q in die Grafik einzeichnen:



► **Höhenunterschied berechnen**

Um den Höhenunterschied zwischen Straßenmitte und Straßenrand zu berechnen, musst du zunächst die **Koordinaten** des Punktes, in dem die Straßenmitte liegt, berechnen. Die Koordinaten des Straßenrandes kennst du bereits. Der Höhenunterschied ergibt sich dann aus der **Differenz** der y -Koordinaten der beiden Punkte.

Schau dir nochmals die Grafik an. Du kannst erkennen, dass die Straßenmitte, also der Tiefpunkt des Graphen, an der Stelle $x = 0$ liegt. Der Tiefpunkt entspricht hier dem Schnittpunkt des Graphen von f mit der y -Achse. Setze für x den Wert 0 in die Funktionsgleichung ein, um den dazugehörigen y -Wert zu ermitteln:

$$f(x) = -\frac{1}{10}(1 + e^{-30 \cdot x^2}) \quad | \quad x = 0$$

$$f(0) = -\frac{1}{10}(1 + e^{-30 \cdot 0^2})$$

$$= -\frac{1}{10}(1 + e^0)$$

$$= -\frac{1}{10}(1 + 1)$$

$$= -0,2$$

Der Punkt, in dem die **Straßenmitte** liegt, hat die Koordinaten $M(0| -0,2)$.

Der rechte Straßerand liegt im Punkt $Q(2,0|0)$. Jetzt kannst du die **Differenz** der beiden y -Werte bilden, um den Höhenunterschied zu ermitteln:

$$\begin{aligned} \text{Höhenunterschied} &= y_Q - y_P && | \quad y_Q = 0; \quad y_P = -0,2 \\ &= 0 - (-0,2) \\ &= 0,2 \end{aligned}$$

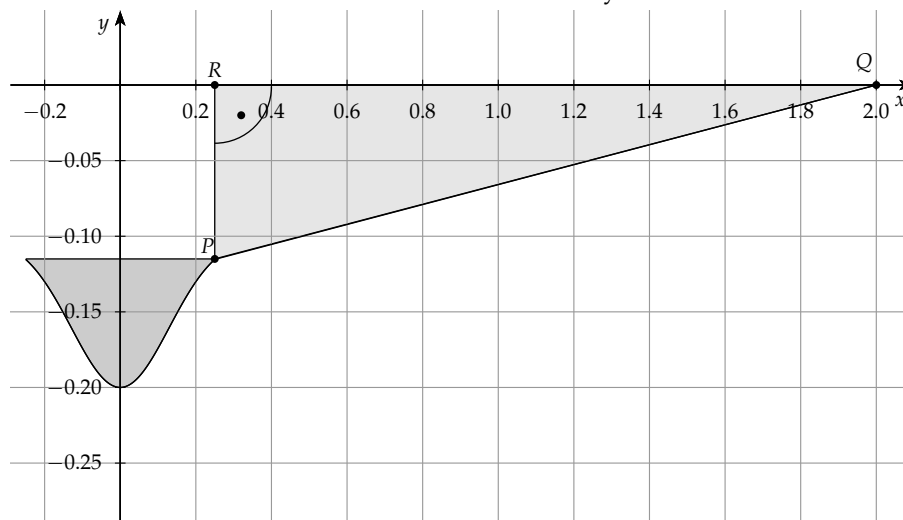
Der Höhenunterschied zwischen Straßenmitte und Straßenrand beträgt also 0,2 Einheiten in deinem Koordinatensystem. Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass x und $f(x)$ in Metern angegeben werden. 0,2 Einheiten entsprechen 0,2 m oder 20 cm.

Der Höhenunterschied zwischen Straßenmitte und Straßenrand beträgt 0,2 m oder 20 cm.

► **Berechnung der Fahrbahnbreite**

Um die Fahrbahnbreite, also die Länge der Strecke \overline{PQ} zu berechnen, kannst du den **Satz des Pythagoras** mit der Formel $c^2 = a^2 + b^2$ anwenden. c ist die Länge der Hypotenuse, a und b sind die Längen der beiden Katheten des Dreiecks.

Zeichne zunächst das Dreieck in das Koordinatensystem ein:



Du kannst erkennen, dass die Hypotenuse des Dreiecks gerade der Strecke \overline{PQ} entspricht. Die beiden Katheten sind die Strecken \overline{PR} und \overline{RQ} .

Die Längen der beiden Katheten lassen sich sehr schnell berechnen:

$$\begin{aligned} \overline{PR} &= y_R - y_P \\ \overline{PR} &= |0 - (-0,115)| \\ \overline{PR} &= |0,115| \end{aligned}$$

Die Strecke \overline{PR} ist 0,115 m lang.

$$\begin{aligned} \overline{RQ} &= |x_Q - x_R| \\ \overline{RQ} &= |x_Q - x_P| \\ \overline{RQ} &= |2 - 0,25| \\ \overline{RQ} &= |1,75| \end{aligned}$$

Die Strecke \overline{RQ} ist 1,75 m lang.

Jetzt kennst du die Längen der beiden Katheten und kannst mit dem Satz des Pythagoras die Länge der Hypotenuse, also der Strecke \overline{PQ} , berechnen:

$$\overline{PQ}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{RQ}^2 \quad | \quad \overline{PR} = 0,115 \text{ m}; \overline{RQ} = 1,75 \text{ m}$$

$$\overline{PQ}^2 = (0,115 \text{ m})^2 + (1,75 \text{ m})^2$$

$$\overline{PQ}^2 = 3,076 \text{ m}^2$$

$$\overline{PQ} \approx 1,75 \text{ m}$$

Die Fahrbahn ist etwa 1,75 m breit.

► **Zeigen der Achsensymmetrie**

Um zu zeigen, dass der Graph einer Funktion achsensymmetrisch zur y -Achse ist, musst du zeigen, dass $f(-x) = f(x)$ für alle x des Definitionsbereichs gilt.

Setze $-x$ in den Funktionsterm von f ein und zeige, dass $f(-x) = f(x)$ ist:

$$f(-x) = -\frac{1}{10}(1 + e^{-30 \cdot (-x)^2})$$

$$= -\frac{1}{10}(1 + e^{-30 \cdot x^2})$$

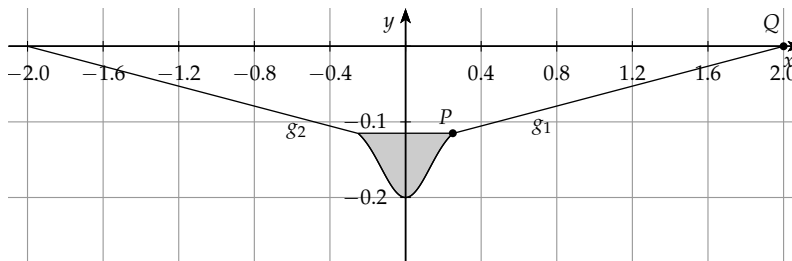
$$= f(x)$$

Da $f(-x) = f(x)$ gilt, ist der Graph der Funktion f achsensymmetrisch zur y -Achse.

► **Gleichung g_2 aufstellen**

Die **allgemeine Geradengleichung** lautet $y = m \cdot x + c$, wobei m die Steigung und c der y -Achsenabschnitt ist. Ermittle m und c und setze sie in die allgemeine Geradengleichung ein.

Bevor du damit beginnst, m und c zu ermitteln, kannst du zunächst eine kurze **Skizze** erstellen, damit der Sachverhalt klarer wird:



Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass der gesamte Querschnitt der Straße, also die gesamte Grafik, **achsensymmetrisch** zur y -Achse ist. Daher kannst du die Geradengleichung der Geraden g_2 ermitteln, indem du die Gerade g_1 an der y -Achse **spiegelst**:

- Der y -Achsenabschnitt, also der y -Wert in dem die Gerade die y -Achse schneidet, bleibt bei einer Spiegelung an der y -Achse gleich. Er lautet daher: $c = -0,1318$
- Betragsmäßig bleibt die Steigung bei einer Spiegelung an der y -Achse gleich. Die Steigung der Geraden g_2 muss lediglich negativ sein. Die Spiegelung entspricht einer Vorzeichenumkehr bei der Steigung: $m = -0,0659$

Setze jetzt die Werte für m und c in die allgemeine Geradengleichung ein:

$$g_2(x) = m \cdot x + c \quad | \quad m = -0,0659; c = -0,1318$$

$$g_2(x) = -0,0659 \cdot x + (-0,1318)$$

$$g_2(x) = -0,0659 \cdot x - 0,1318$$

Die Geradengleichung der Geraden g_2 lautet $g_2(x) = -0,0659 \cdot x - 0,1318$.

b) ► Inhalt der Fläche berechnen

(12P)

Der Flächeninhalt der markierten Fläche ist der Flächeninhalt **zwischen** der Geraden $y = f(0,25)$ und dem **Graphen der Funktion** f . Die untere Grenze des Integrals wäre hier $x_u = -0,25$, die obere Grenze wäre $x_o = 0,25$. Wenn du dir die Skizze nochmals anschaust, dann wirst du erkennen, dass die Fläche **achsensymmetrisch** zur y -Achse ist. Daher kannst du einfach den Flächeninhalt rechts von der y -Achse, also in den Grenzen $x_u = 0$ und $x_o = 0,25$, berechnen und ihn mit Zwei multiplizieren:

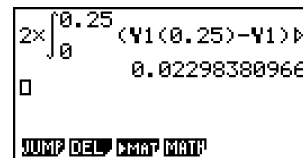
$$A = \int_{-0,25}^{0,25} (f(0,25) - f(x)) dx$$
$$A = 2 \cdot \int_0^{0,25} (f(0,25) - f(x)) dx$$

Bei dieser Rechnung ist dir dein **GTR** behilflich:

Trage den Funktionsterm von f in das Graph-Menü deines GTR ein.

Gehe danach ins Run-Mat-Menü und gib ein: $\boxed{\text{MATH} \rightarrow \int dx}$

Trage jetzt das oben stehende Integral ein. Du musst nur statt dem f immer $Y1$ eintippen, da du unter diesem Platzhalter den Funktionsterm von f abgespeichert hast. Das Y für $Y1$ findest du unter $\boxed{\text{VARS} \rightarrow \text{GRPH}}$

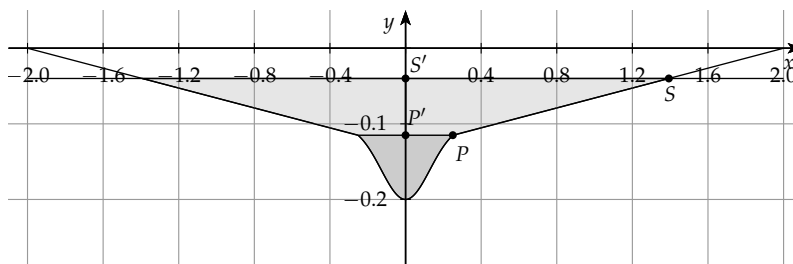


Der Flächeninhalt der Rinne beträgt etwa $0,023 \text{ m}^2$.

► Inhalt der Fläche bei Starkregen

Berechne, bis zu welchem y -Wert das Wasser ansteigt. Anschließend musst du dir überlegen, um welche **Fläche** es sich genau handelt. Wenn du das geklärt hast, kannst du deren Flächeninhalt berechnen.

Das Wasser steigt auf eine Höhe von $0,16 \text{ m}$ über dem Grund an. Der Grund liegt bei einem y -Wert von $y_G = -0,2$. Daher steigt das Wasser bis zu einem y -Wert von $y_W = -0,2 + 0,16 = -0,04$ an. Um einen besseren Überblick zu erhalten, kannst du den Sachverhalt zunächst einmal **skizzieren**:



Du erkennst die Gerade $y = -0,04$ und den Querschnitt der Straße. Der Flächeninhalt des Wassers bei Starkregen setzt sich zusammen aus dem bereits berechneten Flächeninhalt der **Rinne** und dem Flächeninhalt der beiden **Trapeze**. Die Trapeze sind **achsensymmetrisch** zur y -Achse. Daher reicht es, den Flächeninhalt eines Trapezes zu berechnen und ihn anschließend mit 2 zu multiplizieren.

Den **Flächeninhalt eines Trapezes** kannst du mit der Formel $A_T = \frac{1}{2}(a + c) \cdot h$ berechnen. a und c sind die beiden parallelen Seiten, h ist die Höhe des Trapezes. In unserem Fall ist die Seite a die Strecke $\overline{P'P}$ und die Seite c die Strecke $\overline{S'S}$. Die Höhe h entspricht der Strecke $\overline{P'S'}$.

Stelle nun die Formel neu auf:

$$A_T = \frac{1}{2}(a + c) \cdot h$$

$$A_T = \frac{1}{2}(\overline{P'P} + \overline{S'S}) \cdot \overline{P'S'}$$

Jetzt musst du die entsprechenden Werte einsetzen. Dafür benötigst du die Koordinaten der Punkte:

- $P(0,25 | -0,115)$: s. Aufgabenteil a)
- $P'(0 | -0,115)$: gleiche y -Koordinate wie P' ; liegt auf der y -Achse $\Rightarrow x = 0$
- $S(x_S | -0,04)$: s. oben
- $S'(0 | -0,04)$: gleiche y -Koordinate wie S' ; liegt auf der y -Achse $\Rightarrow x = 0$

Dir fehlt die x -Koordinate des Punktes S . Diese kannst du berechnen, indem du die Gerade g_1 mit der Gerade $y = -0,04$ gleichsetzt:

$$g_1(x) = -0,04$$

$$0,0659x - 0,1318 = -0,04 \quad | +0,1318$$

$$0,0659x = 0,0918 \quad | :0,0659$$

$$x \approx 1,393$$

Die Koordinaten des Punktes S sind $S(1,393 | -0,04)$.

Jetzt kannst du den **Flächeninhalt des Trapezes** berechnen:

$$A_T = \frac{1}{2}(\overline{P'P} + \overline{S'S}) \cdot \overline{P'S'}$$

$$A_T = \frac{1}{2}((|0 - 0,25|) + (|0 - 1,393|)) \cdot |(-0,04 - (-0,115))|$$

$$A_T = \frac{1}{2}(0,25 + 1,393) \cdot 0,075$$

$$A_T = 0,0615$$

Der **gesamte Flächeninhalt** setzt sich jetzt zusammen aus dem Flächeninhalt der Rinne und zweimal dem Flächeninhalt des Trapezes:

$$A = A_R + 2 \cdot A_T$$

$$A = 0,023 + 2 \cdot 0,0615$$

$$A = 0,146$$

Der Flächeninhalt des Querschnitts bei Starkregen beträgt etwa $0,146 \text{ m}^2$.

c) ► **Ableitung von f**

(12P)

Bevor du die Ableitung der Funktion f bildest, solltest du den Funktionsterm zunächst **ausmultiplizieren**. Anschließend kannst du die Ableitung mit Hilfe der **Kettenregel** bilden.

$$f(x) = -\frac{1}{10} \cdot (1 + e^{-30x^2})$$

$$f'(x) = -\frac{1}{10} \cdot (0 + e^{-30x^2} \cdot (-60x))$$

$$f'(x) = 0 + \frac{60x}{10} \cdot e^{-30x^2}$$

$$f'(x) = 6x \cdot e^{-30x^2}$$

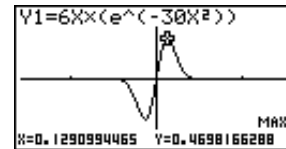
► **Bestimmung der maximalen Steigung**

Die maximale Steigung der Funktion f befindet sich an der Stelle, an der die **Ableitung** von f , also die Funktion f' ein **Maximum** hat.

1. Möglichkeit: GTR

Du kannst die maximale Steigung mit deinem GTR berechnen:

Gib die Funktion f' in das Graph-Menü deines GTR ein und lasse sie mit dem Befehl DRAW zeichnen. Anschließend kannst du über $\boxed{\text{SHIFT} \rightarrow \text{G-SOLV} \rightarrow \text{MAX}}$ das Maximum bestimmen. Die y -Koordinate gibt dir die Steigung des Graphen von f an.



Die maximale Steigung beträgt 0,47.

Alternative: Rechnung von Hand

Um das Maximum der Funktion f' zu bestimmen, musst du f' ableiten und die dadurch entstehende Funktion f'' gleich Null setzen (**notwendige Bedingung**). Beim Ableiten musst du die **Produkt- und die Kettenregel** anwenden:

$$f''(x) = 6 \cdot e^{(-30x^2)} + 6x \cdot e^{(-30x^2)} \cdot (-60x)$$

$$f''(x) = 6 \cdot e^{(-30x^2)} - 360x^2 \cdot e^{(-30x^2)}$$

$$f''(x) = e^{(-30x^2)} (6 - 360x^2)$$

Setze jetzt $f''(x)$ gleich Null, um mögliche Extremstellen zu berechnen:

$$f''(x) = 0$$

$$e^{(-30x^2)} (6 - 360x^2) = 0 \quad | \quad e^{(-30x^2)} = 0 \text{ oder } (6 - 360x^2) = 0$$

$$6 - 360x^2 = 0 \quad | \quad +360x^2$$

$$6 = 360x^2 \quad | \quad :360$$

$$\frac{1}{60} = x^2 \quad | \quad \sqrt{\quad}$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{1}{60}}$$

$$x_{1,2} \approx \pm 0,129$$

Jetzt musst du noch überprüfen, an welcher Stelle sich ein **Maximum** befindet. Dafür bildest du die dritte Ableitung f''' und setzt die eben berechneten Werte in f''' ein (**hinreichende Bedingung**). Beim Ableiten musst du wieder die Produktregel und die Kettenregel anwenden:

$$f'''(x) = e^{(-30x^2)} \cdot (-60x) \cdot (6 - 360x^2) + e^{(-30x^2)} \cdot (0 - 720x)$$

$$f'''(x) = e^{(-30x^2)} \cdot (-360x + 21.600x^3) + e^{(-30x^2)} \cdot (-720x)$$

$$f'''(x) = e^{(-30x^2)} \cdot (-360x + 21.600x^3 - 720x)$$

$$f'''(x) = e^{(-30x^2)} \cdot (21.600x^3 - 1.080x)$$

Setze jetzt x_1 und x_2 in f''' ein und berechne die dazugehörigen Funktionswerte:

$$f'''(x) = e^{(-30x^2)} \cdot (21.600x^3 - 1.080x)$$

$$f'''(x_1) = e^{(-30 \cdot 0,129^2)} \cdot (21.600 \cdot 0,129^3 - 1.080 \cdot 0,129)$$

$$f'''(x_1) \approx -56,4$$

Da $f'''(x_1) < 0$ ist, ist das Extremum an der Stelle $x_1 = 0,129$ ein Maximum. Die maximale Steigung befindet sich also an der Stelle $x_1 = 0,129$. Setze diesen Wert jetzt in die Funktion f' ein, um den dazugehörigen y -Wert zu ermitteln:

$$f'(x) = 6x \cdot e^{-30x^2}$$

$$f'(0,129) = 6 \cdot 0,129 \cdot e^{-30 \cdot 0,129^2}$$

$$f'(0,129) \approx 0,47$$

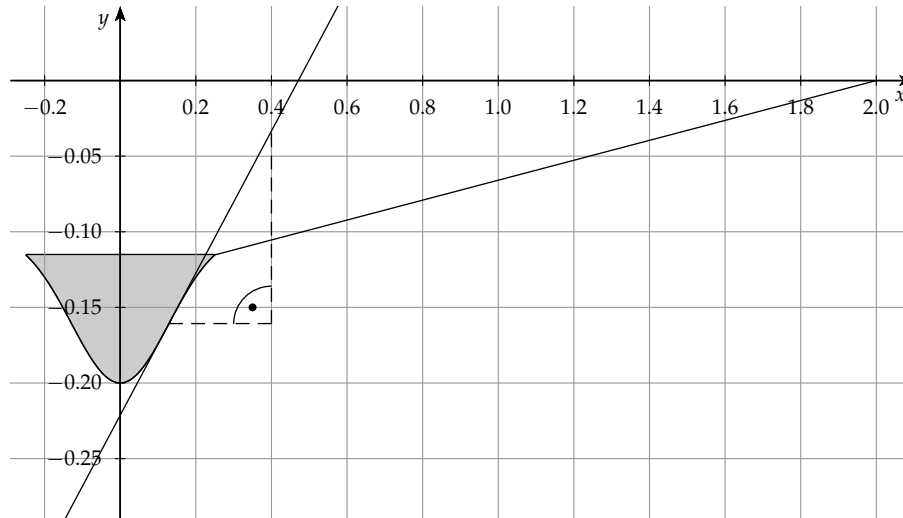
Die maximale Steigung beträgt 0,47.

► Untersuchen, ob die Vorschrift eingehalten ist

Du kannst den Steigungswinkel mit Hilfe des Tangens berechnen.

Oben hast du bereits berechnet, an welcher Stelle die **Steigung maximal** ist. Außerdem hast du die Steigung an dieser Stelle berechnet. Wenn der Steigungswinkel an dieser Stelle nicht größer als 26° ist, dann ist die Steigung nirgendwo größer als 26° . Berechne also den Steigungswinkel der Funktion f an der Stelle $x_1 = 0,129$.

Um den Steigungswinkel an der Stelle $x_1 = 0,129$ zu berechnen, kannst du dir eine Skizze erstellen:



Wie du erkennen kannst, musst du den Steigungswinkel der Tangente der Funktion f an der Stelle $x_1 = 0,129$ gegenüber der Horizontalen berechnen. Das geht mit dem Tangens:

$$\tan(\alpha) = m \quad | \quad m = \text{Steigung} = 0,47$$

$$\tan(\alpha) = 0,47$$

$$\alpha = \tan^{-1}(0,47)$$

$$\alpha \approx 25,17^\circ$$

Der Steigungswinkel an der **steilsten Stelle** beträgt $25,17^\circ$. Daher ist der Winkel zur Horizontalen an keiner Stelle des Rinnenquerschnitts größer als 26° , die Vorschrift wurde eingehalten.

d) ► **Nachweis des Knicks in der Straße**

(11P)

Wenn die Fahrbahn keinen Knick haben würde, dann müsste die Steigung der Geraden g_1 der Steigung der Funktion f im Punkt $P(0,25 | -0,115)$ entsprechen. Berechne daher die **Steigung** von f im Punkt $P(0,25 | -0,115)$.

Die Steigung kannst du mit Hilfe der Ableitung berechnen. Bilde die **Ableitung** der Funktion an der Stelle $x = 0,25$. Die erste Ableitung der Funktion steht im Aufgabenteil c):

$$f'(x) = 6x \cdot e^{-30x^2} \quad | \quad x = 0,25$$

$$f'(0,25) = 6 \cdot 0,25 \cdot e^{-30 \cdot 0,25^2}$$

$$f'(0,25) \approx 0,23$$

Die **Steigung** der Funktion f an der Stelle $x = 0,25$ beträgt etwa $0,23$.

Die Gerade g_1 hat die Steigung $0,0659$. Da die Steigung der Geraden g_1 nicht gleich der Steigung der Funktion an der Stelle $x = 0,25$ ist, hat die Straße einen Knick.

► **Aufstellen einer Tangentengleichung**

Mach dir zunächst klar, welche **Angaben** gegeben sind. Anschließend kannst du die **allgemeine Tangentengleichung** notieren und die Elemente dieser bestimmen. Da nur die **Vorgehensweise** beschrieben werden soll, musst du die Rechnung selbst nicht durchführen.

Hier sollst die **Gleichung** einer Tangenten an den Graphen von f bilden, die durch den **Punkt** $Q(2|0)$ geht. Die Tangente hat die Steigung $f'(a)$, wobei a die Stelle ist, an der die Tangente an den Graphen von f angelegt wird. Die **allgemeine Tangentengleichung** lautet $t(x) = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$. Diese Tangente soll durch den Punkt $Q(2|0)$ gehen. Das erreichst du, indem du für x den Wert 2 und für $t(x)$ den Wert 0 einsetzt. So könntest du auch die Stelle a ermitteln. Das ist hier aber nicht verlangt.

Die **Vorgehensweise** ist also folgende:

- Bilde die erste Ableitung von f und setze die gesuchte Stelle a in diese ein.
- Setze $x = a$ in den Funktionsterm $f(x)$ ein.
- Setze $f(a)$, $f'(a)$ und a in die allgemeine Tangentengleichung ein.
- Setze $x = 2$ in die allgemeine Tangentengleichung ein.
- Setze die entstandene Tangentengleichung gleich Null und löse sie nach a auf.
- Jetzt kannst du die tatsächlichen Zahlenwerte, $f(a)$ und $f'(a)$, ermitteln, indem du a in f bzw. f' einsetzt.
- Setze die Werte a , $f(a)$ und $f'(a)$ in die allgemeine Tangentengleichung ein.