

Aufgabenstellung:

Die Buche ist ein in weiten Teilen Europas heimischer Laubbaum.

Ein Biologe modelliert das Höhenwachstum von Buchen durch Funktionen f_a mit der Gleichung

$$f_a(t) = a \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{50}t}\right)^2, t \geq 0, \text{ und dem Parameter } a > 0.^1$$

Dabei wird t als Maßzahl zur Einheit 1 Jahr, $f_a(t)$ als Maßzahl zur Einheit 1 Meter aufgefasst.

Der Zeitpunkt des Keimens des Buchensamens wird durch $t = 0$ festgelegt.

a) (1) Zeichnen Sie den Graphen von f_{35} . (14P)

- (2) Bei einer 10 Jahre alten Buche wird eine Höhe von 1,15 m gemessen.
Berechnen Sie den Parameterwert von a derjenigen Funktion f_a , die das Höhenwachstum dieser Buche beschreibt.

In allen folgenden Teilaufgaben wird das Höhenwachstum einer speziellen Buche durch die Funktion f mit der Gleichung

$$f(t) = f_{35}(t) = 35 \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{50}t}\right)^2, t \geq 0,$$

modelliert.

- (3) Berechnen Sie $f(20)$ und nennen Sie die Bedeutung dieses Wertes im Sachzusammenhang.
(4) Begründen Sie, dass gemäß der Modellierung die Buche nicht höher als 35 m werden kann.

b) Bestimmen Sie rechnerisch den Zeitpunkt, zu dem die Buche am stärksten wächst. (9P)

[Hinweis: In der Abbildung auf Seite 3 ist auch der Graph von f' dargestellt.

$$\text{Zur Kontrolle: } f'(t) = 1,4 \cdot \left(e^{-\frac{1}{50}t} - e^{-\frac{1}{25}t}\right); \quad f''(t) = 0,028 \cdot \left(2 \cdot e^{-\frac{1}{25}t} - e^{-\frac{1}{50}t}\right)]$$

c) In der Abbildung auf Seite 2 ist neben dem Graphen der Wachstumsgeschwindigkeit f' der oben genannten Buche auch der Graph der Wachstumsgeschwindigkeit g' einer zweiten Buche mit der Gleichung (19P)

$$g'(t) = 1,1 \cdot \left(e^{-\frac{1}{50}t} - e^{-\frac{1}{25}t}\right), t \geq 0,$$

dargestellt. Die zweite Buche hat an einem anderen Standort zum selben Zeitpunkt wie die erste Buche gekeimt.

- (1) Beschreiben Sie den zeitlichen Verlauf der Wachstumsgeschwindigkeiten der beiden Buchen im Vergleich.
(2) Begründen Sie, dass der Graph von g' an derselben Stelle ein Maximum besitzt wie der Graph von f' .

¹Die Funktion f_a ist für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert, wird aber nur für $t \geq 0$ zur Modellierung verwendet.

(3) Begründen Sie anhand der Abbildung, dass die erste Buche zu jedem Zeitpunkt $t > 0$ eine größere Höhe hat als die zweite Buche.

(4) Wenn die Funktion h die Wachstumsgeschwindigkeit eines Baumes beschreibt, wird durch $m = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} h(t) dt$ die mittlere Wachstumsgeschwindigkeit im Zeitintervall $[t_1; t_2]$ bestimmt.

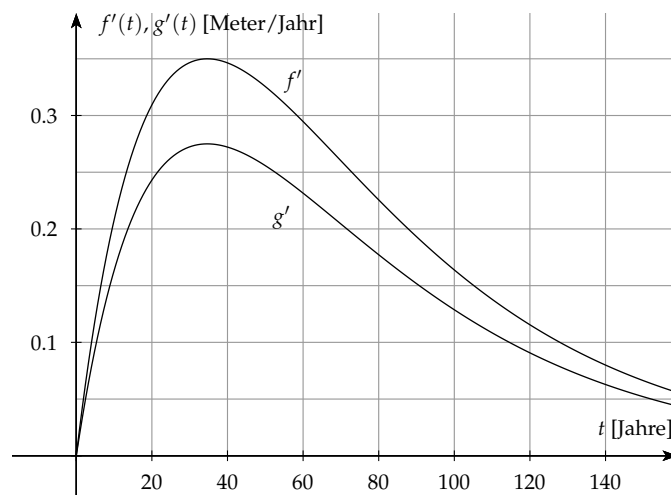
Ermitteln Sie die mittlere Wachstumsgeschwindigkeit der zweiten Buche in den ersten 50 Jahren nach dem Keimen des Samens.

d) (1) Geben Sie eine Gleichung einer Stammfunktion von g' an.

(8P)

(2) Jemand behauptet, dass die beiden Buchen 50 Jahre nach ihrer Anpflanzung gemäß den Modellierungen ihres Höhenwachstums einen Höhenunterschied von mindestens 3,50 m aufweisen müssten.

Prüfen Sie, ob die Behauptung wahr ist.



Abbildung