a) (1) ▶ **Ermitteln der Funktionsgleichung von f** (16P)

Aus der Aufgabenstellung geht hervor, dass f eine Funktion dritten Grades sein soll. Der Funktionsterm eine Funktion dritten Grades hat im Allgemeinen diese Form:

$$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

Weiterhin ist bekannt, dass der Graph von f punktsymmetrisch zum Ursprung verläuft. Daraus folgt direkt, dass im Funktionsterm von f nur **ungerade Hochzahlen** vorkommen. Wir können den Ansatz also vereinfachen zu:

$$f(x) = a \cdot x^3 + c \cdot x$$

1. Schritt: Aufstellen der Nebenbedingungen

Die Funktion f wird durch die Unbekannten a und c bestimmt. Um diese Unbekannten zu bestimmen, gilt es ein Gleichungssystem mit zwei Variablen zu lösen. Ein Gleichungssystem mit zwei Variablen ist nur dann eindeutig lösbar, wenn zwei Nebenbedingungen vorhanden sind. Diese Nebenbedingungen ergeben sich wie folgt aus der Aufgabenstellung:

Der Aufgabenstellung kannst du direkt entnehmen, dass der Graph von f durch den Punkt $P(3\,|\,0)$ verläuft. Es ergibt sich diese Nebenbedingung:

$$\text{I } f(3) = 0 = 3^3 \cdot a + 3 \cdot c$$

Außerdem ist der Aufgabenstellung zu entnehmen, dass die Tangente an den Graphen von f im Ursprung eine Steigung von $-4,5$ hat. Das bedeutet, dass die erste Ableitung an der Stelle $x = 0$ den Wert $-4,5$ annimmt, da diese jeweils die Steigung von f angibt.
Erste Ableitung der Funktion f:

$$f'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$$

Es ergibt sich diese Nebenbedingung:

$$\text{II } f'(0) = -4,5 = 3 \cdot 0^2 \cdot a + 2 \cdot 0 \cdot b + c \quad \Rightarrow \quad c = -4,5$$

2. Schritt: Lösen des Gleichungssystems

Einsetzen von $c = -4,5$ in I ergibt:

$$\begin{aligned} 0 &= 27 \cdot a + 3 \cdot (-4,5) \\ 0 &= 27a - 13,5 \\ 27a &= 13,5 \\ a &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Damit folgt die Funktionsgleichung $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4,5x$.

(2) ▶ **Nullstellen der Funktion f**

Um die Nullstellen der Funktion f zu bestimmen, musst du $f(x)=0$ setzen. Deine Rechnung sollte so aussehen:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ 0 &= \tfrac{1}{2}\cdot x^2 - \tfrac{9}{2}\cdot x && \mid x \text{ ausklammern} \\ 0 &= x\cdot\left(\tfrac{1}{2}\cdot x^2 - \tfrac{9}{2}\right) && \mid x_1 = 0 \\ 0 &= \tfrac{1}{2}\cdot x^2 - \tfrac{9}{2} && \mid +\tfrac{9}{2} \\ \tfrac{9}{2} &= \tfrac{1}{2}\cdot x^2 && \mid \cdot 2 \\ 9 &= x^2 && \mid \sqrt{\ } \\ x_2 &= 3 \\ x_3 &= -3 \end{aligned}$$

Es ergeben sich diese Nullstellen: $x_1 = 0$; $x_2 = 3$ und $x_3 = -3$

(3) ▶ **Untersuchen, ob einer der Extrempunkte auf der Wendetangenten liegt**

1. Schritt: Bestimmen der Extremstellen

Extremstellen befinden sich da, wo die erste Ableitung der entsprechenden Funktion Nullstellen besitzt.
Erste Ableitung von f: $f'(x) = \frac{3}{2}\cdot x^2 - \frac{9}{2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 0 &= \tfrac{3}{2}\cdot x^2 - \tfrac{9}{2} && \mid +\tfrac{9}{2} \\ \tfrac{9}{2} &= \tfrac{3}{2}\cdot x^2 && \mid \cdot\tfrac{2}{3} \\ 3 &= x^2 && \mid \sqrt{\ } \\ x_1 &= \sqrt{3} \\ x_2 &= -\sqrt{3} \end{aligned}$$

Die Art der Extrema bestimmst du über die zweite Ableitung der Funktion f:
Zweite Ableitung: $f''(x) = 3\cdot x$

$$\begin{aligned} f''(\sqrt{3}) &= 3\cdot\sqrt{3} \\ f''(\sqrt{3}) &= 5,2 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Minimum

$$\begin{aligned} f''(-\sqrt{3}) &= 3\cdot(-\sqrt{3}) \\ f''(-\sqrt{3}) &= -5,2 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Maximum

y - Koordinaten der Extrempunkte:

$f(\sqrt{3}) = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{3})^3 - \frac{9}{2} \cdot \sqrt{3}$
$f(\sqrt{3}) = 2,6 - 7,79$
$f(\sqrt{3}) = -5,19$

Es ergeben sich diese Koordinaten für den Tiefpunkt: $T(\sqrt{3} \mid -5,19)$. Aufgrund der Punktsymmetrie ergeben sich für den Hochpunkt diese Koordinaten: $H(-\sqrt{3} \mid 5,19)$.

2. Schritt: Bestimmen der Wendetangenten T und prüfen ob H oder T auf ihr liegt

Bevor du die Wendetangente bestimmen kannst, musst du zuerst die Position des Wendepunkts bestimmen. Der Wendepunkt liegt da, wo die erste Ableitung von f ein Maximum annimmt. Das Maximum der ersten Ableitung befindet sich da wo die zweite Ableitung von f den Wert null annimmt:

$f''(x) = 0$
$\quad 0 = 3 \cdot x \qquad \mid : 3$
$\quad x = 0$

Da $f'''(x) = 3 \neq 0$ für $x = 0$ ist, befindet sich ein Wendepunkt im Ursprung. Die Wendetangente T ist eine Ursprungsgerade der Form $y = m \cdot x$. Ihre Steigung m berechnest du, indem du $x = 0$ in die erste Ableitung von f einsetzt. Wendetangente T:

$T(x) = f'(0) \cdot x$
$T(x) = \frac{3}{2} \cdot 0^2 - \frac{9}{2} \cdot x$
$T(x) = -\frac{9}{2} \cdot x$

Um jetzt zu untersuchen, ob eine der Extremstellen auf der Wendetangenten T liegt, musst du eine Punktprobe mit H und T durchführen:

(1) Punktprobe mit $H(-\sqrt{3} \mid 5,19)$:

$5{,}19 = -\frac{9}{2} \cdot (-\sqrt{3})$
$5{,}19 \neq 7,79$

(2) Punktprobe mit $T(\sqrt{3} \mid -5,19)$:

$-5{,}19 = -\frac{9}{2} \cdot (\sqrt{3})$
$-5{,}19 \neq -7,79$

Keine der beiden Extrempunkte liegt auf der Wendetangenten.

b) (1) ▸ **Bestimmen des Streckfaktors k** (8P)

Die Fläche, welche der Graph von f und die x - Achse einschließen unterteilt sich aufgrund der Punktsymmetrie des Graphen von f in zwei gleich große Stücke. Das erste Stück wird durch die Nullstelle bei $x = -3$ und der Nullstelle bei $x = 0$ begrenzt, das zweite Stück wird von der Nullstelle bei $x = 0$ und der Nullstelle bei $x = 3$ begrenzt. Den Flächeninhalt dieser Flächen berechnest du über ein Integral. Dir ist bekannt, dass der unbekannte Streckfaktor die Fläche vergrößert, deshalb muss dieser vor das Integral geschrieben werden.

Aufgrund der Symmetrie ist es hier ausreichend mit einem der beiden Flächenstück zu arbeiten, vergiss aber dabei nicht, die Fläche dann zu halbieren.
Der Flächeninhalt A ergibt sich so:

$$A = 2 \cdot k \cdot \int_{-3}^{0} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$$

Lösen der Gleichung:

$$4,5 = 2 \cdot k \cdot \int_{-3}^{0} (\frac{1}{2} \cdot x^3 - \frac{9}{2} \cdot x\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}
4,5 &= 2 \cdot k \cdot \left[\tfrac{1}{8} \cdot x^4 - \tfrac{9}{4} \cdot x^2\right]_{-3}^{0} \\
4,5 &= 2 \cdot k \cdot \left((\tfrac{1}{8} \cdot 0^4 - \tfrac{9}{4} \cdot 0^2) - (\tfrac{1}{8} \cdot (-3)^4 - \tfrac{9}{4} \cdot (-3)^2)\right) \\
4,5 &= 2 \cdot k \cdot (0 - (10,125 - 20,25)) \\
4,5 &= 2 \cdot k \cdot 10,125 \qquad |:20,25 \\
k &= \tfrac{2}{9}
\end{aligned}$$

Der Streckfaktor ist $k = \frac{2}{9}$.

(2) ▸ **Angeben der Funktionsgleichung von h**

Die Funktionsgleichung von h ergibt sich, indem du den Funktionsterm von f mit dem Streckfaktor k multiplizierst:

$$\begin{aligned}
h(x) &= k \cdot f(x) \\
h(x) &= \tfrac{2}{9} \cdot (\tfrac{1}{2} \cdot x^3 - \tfrac{9}{2} \cdot x) \\
h(x) &= \tfrac{1}{9} \cdot x^3 - x
\end{aligned}$$

Der Funktionsterm der Funktion h ist:

$$h(x) = \tfrac{1}{9} \cdot x^3 - x$$

c) ▶ **Bestimmen der Schnittpunkte von g_m und h in Abhängigkeit von m** (9P)

Die Schnittstellen von g_m und h bestimmst du, indem du die Funktionsterme gleichsetzt:

$$\begin{aligned} g_m(x) &= h(x) & \\ m\cdot x &= \tfrac{1}{9}\cdot x^3 - x & &\mid -m\cdot x \\ 0 &= \tfrac{1}{9}\cdot x^3 - x - m\cdot x & &\mid x \text{ ausklammern} \\ 0 &= x(\tfrac{1}{9}\cdot x^2 - 1 - m) & &\mid \text{Erster Schnittpunkt bei } x_1 = 0 \\ 0 &= \tfrac{1}{9}\cdot x^2 - 1 - m & &\mid +(1+m) \\ 1+m &= \tfrac{1}{9}\cdot x^2 & &\mid \cdot 9 \\ 9\cdot(1+m) &= x^2 & &\mid \surd \\ x_2 &= 3\cdot\sqrt{1+m} & & \\ x_3 &= -3\cdot\sqrt{1+m} & & \end{aligned}$$

Um zu untersuchen, wie viele Schnittpunkte g_m und h in Abhängigkeit von m besitzen, musst du das Verhalten der Schnittpunkte x_2 und x_3 für $m > -1$ und $m \leq -1$ untersuchen:

$\mathbf{m > -1}$:

Für $m > -1$ ist der Ausdruck unter der Wurzel positiv. Da $x_1 = 0$ unabhängig von m eine Schnittstelle ist, haben g_m und h für $m > -1$ drei Schnittstellen.

$\mathbf{m \leq -1}$:

Ist $m = -1$, so ist der Ausdruck unter der Wurzel gleich null, in diesem Fall gibt es nur eine Schnittstelle bei $x_1 = 0$. Ist $m < -1$, so ist der Ausdruck unter der Wurzel negativ, auch in diesem Fall gibt es nur eine Schnittstelle bei x_1.

Koordinaten der Schnittpunkte für $\mathbf{m > -1}$

Um die Koordinaten der Schnittpunkte für $m > -1$ zu bestimmen, musst du x_1, x_2 und x_3 entweder in $g_m(x)$ oder $h(x)$ einsetzen. Wegen des geringeren Rechenaufwands empfiehlt es sich, diese in $g_m(x)$ einzusetzen:

x_1: $g_m(x_1) = m\cdot 0 = 0$
$\Rightarrow$ Schnittpunkt $P_1(0 \mid 0)$

x_2: $g_m(x_2) = m\cdot 3\cdot\sqrt{1+m} = 3\cdot m\cdot\sqrt{1+m}$
$\Rightarrow$ Schnittpunkt $P_2(3\cdot\sqrt{1+m} \mid 3\cdot m\cdot\sqrt{1+m})$

x_3: $g_m(x_3) = m\cdot(-3\cdot\sqrt{1+m}) = -3\cdot m\cdot\sqrt{1+m}$
$\Rightarrow$ Schnittpunkt $P_3(-3\cdot\sqrt{1+m} \mid -3\cdot m\cdot\sqrt{1+m})$

d) (1) ▶ **Erstellen einer Skizze für $\mathbf{m = \frac{1}{3}}$** (17P)

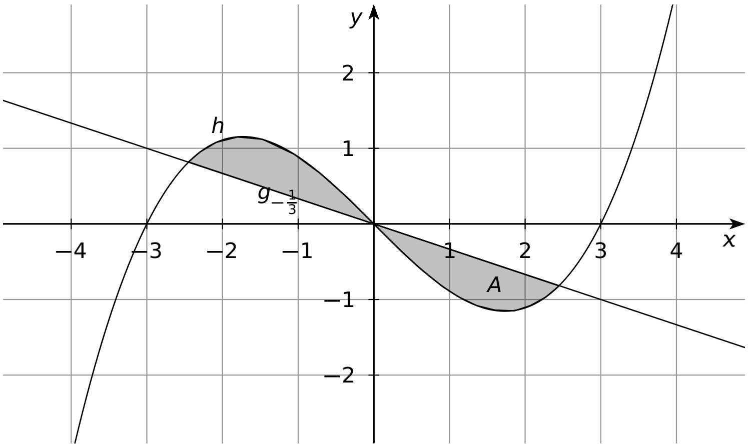
Die Geradengleichung für $m = -\frac{1}{3}$ lautet: $g_{-\frac{1}{3}}: y = -\frac{1}{3}\cdot x$.

Deine Aufgabe ist es hier den in der Aufgabenstellung beschriebenen Sachverhalt zu skizzieren, das heißt, du musst $g_{-\frac{1}{3}}$ und h in einem Koordinatensystem darstellen und die eingeschlossene Fläche markieren.

Beim Zeichnen kann dir der GTR behilflich sein, gib dazu unter Y= die Funktionen ein und lasse dir über diese Befehlsfolge die zugehörigen Wertetabellen anzeigen:

$\boxed{\text{2nd} \rightarrow \text{TABLE}}$.

Deine Skizze könnte so aussehen:



(2) ▶ **Herleiten der Flächenformel A(m)**

Die Flächenformel $A(m)$ kannst du über das Integral der eingeschlossenen Fläche links der x - Achse und das Integral der eingeschlossenen Fläche rechts der x - Achse herleiten. Die Fläche links der y - Achse berechnest du, indem du das Integral von g_m von dem Integral h abziehst, die Fläche rechts der y - Achse berechnest du indem du das Integral von h vom Integral der Geraden g_m abziehst. Grenzen der Integrale sind jeweils die Schnittpunkte und der Ursprung. Da hier eine Fläche berechnet werden soll, muss der Betrag der einzelnen Flächen berechnet werden.

Die Fläche $A(m)$ berechnest du demnach so:

$$A(m) = \left| \int_{-3\sqrt{m+1}}^{0} (h(x) - g_m(x))\,\mathrm{d}x \right| + \left| \int_{0}^{3\sqrt{m+1}} (g_m(x) - h(x))\,\mathrm{d}x \right|$$

Da die Graphen von h und g_m punktsymmetrisch sind, sind die eingeschlossenen Flächen rechts und links der y - Achse gleich. Das heißt du musst nur ein Integral berechnen und dessen Fläche danach verdoppeln:

$$A(m) = 2\cdot\left|\int_0^{3\sqrt{m+1}}(g_m(x)-h(x))\,\mathrm{d}x\right|$$
$$A(m) = 2\cdot\left|\left[\tfrac{1}{36}\cdot x^4-\tfrac{1}{2}\cdot x^2-\tfrac{1}{2}\cdot m\cdot x^2\right]_0^{3\cdot\sqrt{m+1}}\right|$$
$$A(m) = 2\cdot\left|\left((\tfrac{1}{36}\cdot(3\cdot\sqrt{m+1})^4-\tfrac{1}{2}\cdot(3\cdot\sqrt{m+1})^2-\tfrac{1}{2}\cdot m\cdot(3\cdot\sqrt{m+1})^2)-(\tfrac{1}{36}\cdot 0^4-\tfrac{1}{2}\cdot 0^2-\tfrac{1}{2}\cdot m\cdot 0\right.$$
$$A(m) = 2\cdot\left|\left((\tfrac{81}{36}\cdot(m+1)^2-\tfrac{9}{2}\cdot(m+1)-\tfrac{9}{2}\cdot m\cdot(m+1))-0\right)\right|$$
$$A(m) = 2\cdot\left|\left(\tfrac{9}{4}\cdot(m^2+2\cdot m+1)-\tfrac{9}{2}\cdot m-\tfrac{9}{2}-\tfrac{9}{2}\cdot m^2-\tfrac{9}{2}\cdot m\right)\right|$$
$$A(m) = 2\cdot\left|\left(\tfrac{9}{4}\cdot m^2+\tfrac{9}{2}\cdot m+\tfrac{9}{4}-9\cdot m-\tfrac{9}{2}-\tfrac{9}{2}\cdot m^2\right)\right|$$
$$A(m) = 2\cdot\left|\left(-\tfrac{9}{4}\cdot m^2-\tfrac{9}{2}\cdot m-\tfrac{9}{4}\right)\right|$$
$$A(m) = 2\cdot\left|\left(-\tfrac{9}{4}\cdot(m^2+2\cdot m+1)\right)\right|$$
$$A(m) = 2\cdot\tfrac{9}{4}\cdot(m+1)^2$$
$$A(m) = \tfrac{9}{2}\cdot(m+1)^2$$
$$A(m) = 4,5\cdot(m+1)^2$$

(3) ▶ **Bestimmen der Schnittpunkte**

1. Teil: Schnittpunkte im ersten Quadraten mit g_3

Die Funktionsgleichung der Geraden g_3 lautet:

$g_3(x) = 3\cdot x$

Im Aufgabenteil c) hast du die Schnittstellen von g_m und h in Abhängigkeit von der Steigung m ermittelt. Setze nun die Steigung der Geraden g_3 in diese ein und ermittle so den Schnittpunkt. Da du hier den Schnittpunkt im ersten Quadraten angeben musst, musst du P_2 benutzen, da dieser der einzige Schnittpunkt ist, welcher im ersten Quadraten liegen könnte:
$m = 3$ mit $P_2(3\sqrt{m+1}\mid 3\cdot m\sqrt{m+1})$, es ergibt sich:
$S(3\sqrt{3+1}\mid 3\cdot 3\sqrt{3+1}) = S(3\cdot 2\mid 9\cdot 2) = S(6\mid 18)$

Der Schnittpunkt von h und g_3, im ersten Quadraten, ist $S(6\mid 18)$.

2. Teil: Schnittpunkte im vierten Quadraten mit $g_{-\frac{1}{3}}$

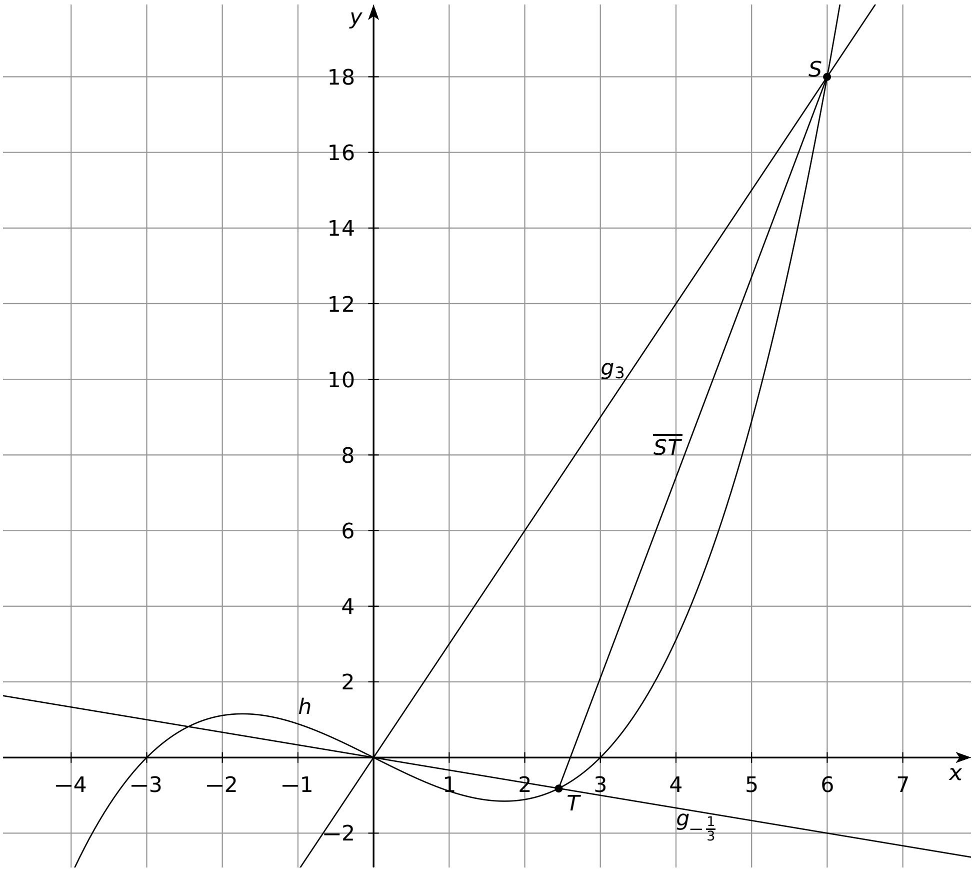
Gehe hier vor wie im ersten Teil dieser Teilaufgabe. Beachte aber, dass $P_2(3\sqrt{m+1}\mid 3\cdot m\sqrt{m+1})$ der einzige Schnittpunkt der Graphen von g_m und h ist, der im vierten Quadraten liegen kann:

$m = -\frac{1}{3}$ mit $P_2(3\sqrt{m+1}\mid 3\cdot m\sqrt{m+1})$, es ergibt sich:
$T(3\sqrt{-\frac{1}{3}+1}\mid 3\cdot(-\frac{1}{3})\sqrt{-\frac{1}{3}+1}) = T(3\sqrt{\frac{2}{3}}\mid -\sqrt{\frac{2}{3}})$
Der Schnittpunkt der Graphen von h und $g_{-\frac{1}{3}}$, im vierten Quadraten, ist $T(3\sqrt{\frac{2}{3}}\mid -\sqrt{\frac{2}{3}})$.

(4) ▶ **Einzeichnen von $\overline{ST}$ und g_3 in die Skizze von d)(1)**

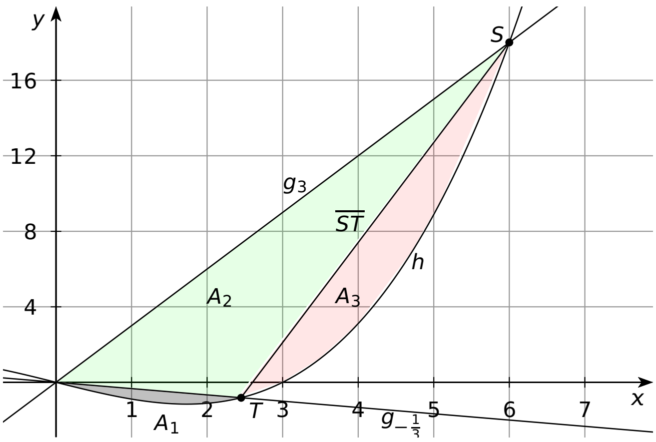
Gehe beim Zeichnen von g_3 vor wie im ersten Aufgabenteil dieser Teilaufgabe. Hast du die Skizze im ersten Aufgabenteil zu klein gezeichnet, so empfiehlt es sich eine Neue anzufertigen.

Deine Zeichnung sollte so aussehen:



(5) ▶ **Bestimmen der eingeschlossenen Fläche**

Bevor du anfängst die Fläche zu berechnen, empfiehlt es sich hier eine Skizze des Sachverhalts anzufertigen:



Wie du der Skizze entnehmen kannst, ist die Fläche, welche durch g_3 und h eingeschlossen wird, insgesamt in 3 Teilflächen unterteilt. Den gesuchten Flächeninhalt A_3 bestimmst du, indem du von der Fläche, welche von g_3 und h eingeschlossen wird, die Teilflächen A_1 und A_2 abziehst.

Fläche A₁:
Die Fläche A_1 wird von h und der Geraden $g_{-\frac{1}{3}}$ eingeschlossen. Den Flächeninhalt dieser Fläche berechnest du, indem du $m = -\frac{1}{3}$ in die Formel aus d)(2) einsetzt. Achte darauf, dass du diesen Flächeninhalt halbieren musst, da $A(m)$ die gesamte eingeschlossene Fläche angibt:

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot A(-\tfrac{1}{3}) = 2,25(-\tfrac{1}{3}+1)^2 = 1\,\text{FE}$$

Fläche A₂:
Die Fläche A_2 ist ein Dreieck, dieses Dreieck wird durch den Ursprung O und die Schnittpunkte T und S begrenzt. Die Gerade g_3 besitzt die Steigung $m = 3$, da $\frac{1}{3}$ der Kehrwert von 3 ist, bedeutet das, dass g_3 und $g_{-\frac{1}{3}}$ orthogonal aufeinander stehen. Daraus folgt, dass das Dreieck OST ein rechtwinkliges Dreieck ist.
Um in diesem Dreieck den Flächeninhalt A_2 zu bestimmen, musst du wissen, wie lang die Strecke $\overline{OT}$ und $\overline{OS}$ sind. Die Länge dieser Strecken bestimmst du über den Satz des Pythagoras:

Strecke $\overline{OS}$:

$$\begin{aligned}\overline{OS}^2 &= S_x^2 + S_y^2\\ \overline{OS}^2 &= 6^2 + 18^2\\ \overline{OS}^2 &= 360 \quad \mid \sqrt{}\\ \overline{OS} &= 18,97\,\text{LE}\end{aligned}$$

Strecke $\overline{OT}$:

$$\begin{aligned}\overline{OT}^2 &= T_x^2 + T_y^2\\ \overline{OT}^2 &= (3\sqrt{\tfrac{2}{3}})^2 + (-\sqrt{\tfrac{2}{3}})^2\\ \overline{OT}^2 &= 9 \cdot \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{3}\\ \overline{OT}^2 &= \tfrac{20}{3} \quad \mid \sqrt{}\\ \overline{OT} &= 2,58\,\text{LE}\end{aligned}$$

Den Flächeninhalt A_2 des Dreiecks berechnest du jetzt so:

$$\begin{aligned}A_2 &= \tfrac{1}{2} \cdot \overline{OS} \cdot \overline{OT}\\ A_2 &= \tfrac{1}{2} \cdot 18,97\,\text{LE} \cdot 2,58\,\text{LE}\\ A_2 &= 24,47\,\text{FE}\end{aligned}$$

Fläche A₃:

Die Fläche A_3 berechnest du jetzt, indem du vom Flächeninhalt des Flächenstücks, welches von g_3 und h rechts von der x - Achse eingeschlossen wird, die Teilflächen A_1 und A_2 subtrahierst:

$$\begin{aligned}A_3 &= \tfrac{1}{2} \cdot A(3) - A_1 - A_2\\ A_3 &= \tfrac{1}{2} \cdot (4,5 \cdot (3+1)^2) - 1\,\text{FE} - 24,47\,\text{FE}\\ A_3 &= \tfrac{1}{2} \cdot 72\,\text{FE} - 25,47\,\text{FE}\\ A_3 &= 10,53\,\text{FE}\end{aligned}$$

Der Flächeninhalt des Flächenstücks, welches von h und der Strecke $\overline{ST}$ eingeschlossen wird, ist $10,53\,\text{FE}$.