a) **► Nullstellen von f bestimmen** (16P)

►► Lösungsweg A: Handschriftliche Lösung

Zur Bestimmung der Nullstellen wird $f(x) = 0$ gesetzt.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x^4 - 5x^2 + 4,5 &= 0 \quad &&| \cdot 2 \\ x^4 - 10x^2 + 9 &= 0 \quad &&| \text{ Substitution: } z = x^2 \\ z^2 - 10z + 9 &= 0 \end{aligned}$$

p-q-Formel anwenden:

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{10}{2} \pm \sqrt{5^2 - 9} \\ &= 5 \pm \sqrt{16} \\ &= 5 \pm 4 \\ z_1 &= 1 \\ z_2 &= 9 \end{aligned}$$

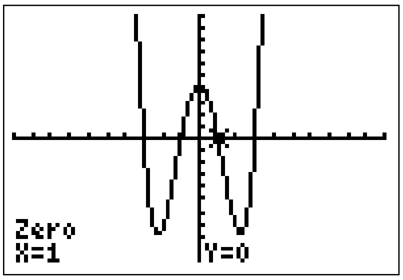
Resubstitution:

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 \quad &&| z = x^2 \qquad & z_2 &= 9 \quad &&| z = x^2 \\ x^2 &= 1 \quad &&| \sqrt{\ } & x^2 &= 9 \quad &&| \sqrt{\ } \\ x_{1,2} &= \pm 1 & & & x_{3,4} &= \pm 3 \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die Nullstellen $N_1(-3|0)$, $N_2(-1|0)$, $N_3(1|0)$ und $N_4(3|0)$.

►► Lösungsweg B: Lösung mit dem GTR

Zeichne den Graphen von f und bestimme mit $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \text{TRACE (CALC)} \rightarrow \text{ZERO}}$ die Nullstellen von f.



Es ergeben sich die Nullstellen $N_1(-3|0)$, $N_2(-1|0)$, $N_3(1|0)$ und $N_4(3|0)$.

► Extrema und Wendepunkte bestimmen

►► Lösungsweg A: Handschriftliche Lösung

Zur Bestimmung der Extrema und Wendepunkte werden die ersten Ableitungen benötigt.

Ableitungen bilden

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}x^4 - 5x^2 + 4,5 \\ f'(x) &= 2x^3 - 10x \\ f''(x) &= 6x^2 - 10 \\ f'''(x) &= 12x \end{aligned}$$

Extrema bestimmen

Zur Bestimmung der Extrema wird $f'(x) = 0$ gesetzt.

$$\begin{aligned} 2x^3 - 10x &= 0 \qquad | \; x \text{ ausklammern} \\ x\left(2x^2 - 10\right) &= 0 \end{aligned}$$

Ein Produkt ist Null, wenn einer seiner Faktoren Null ist.

$$x_1 = 0$$

$$\begin{aligned} 2x^2 - 10 &= 0 \qquad |: 2 \\ x^2 - 5 &= 0 \qquad | \sqrt{} \\ x_{2,3} &= \pm\sqrt{5} \end{aligned}$$

Diese Werte für x werden in $f''(x)$ eingesetzt, um zu überprüfen, ob es sich um Hoch- oder Tiefpunkte handelt.

$f''\left(-\sqrt{5}\right) = 6 \cdot \left(-\sqrt{5}\right)^2 - 10 = 6 \cdot 5 - 10 = 20 > 0$: Tiefpunkt

$f''(0) = 6 \cdot 0 - 10 = -10 < 0$: Hochpunkt

$f''\left(\sqrt{5}\right) = 6 \cdot \left(\sqrt{5}\right)^2 - 10 = 6 \cdot 5 - 10 = 20 > 0$: Tiefpunkt

Zuletzt werden noch die zugehörigen y-Werte bestimmt.

$$f\left(-\sqrt{5}\right) = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{5}\right)^4 - 5 \cdot \left(-\sqrt{5}\right)^2 + 4,5 = \frac{1}{2} \cdot 25 - 5 \cdot 5 + 4,5 = -8$$

$$f(0) = \frac{1}{2} \cdot 0 - 5 \cdot 0 + 4,5 = 4,5$$

$$f\left(\sqrt{5}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}\right)^4 - 5 \cdot \left(\sqrt{5}\right)^2 + 4,5 = \frac{1}{2} \cdot 25 - 5 \cdot 5 + 4,5 = -8$$

Daraus ergeben sich die Tiefpunkte $T_1\left(-\sqrt{5}\middle|-8\right)$ und $T_2\left(\sqrt{5}\middle|-8\right)$ sowie der Hochpunkt $H(0|4,5)$.

Wendepunkte bestimmen

Zur Bestimmung der Wendepunkte wird $f''(x) = 0$ gesetzt.

$$\begin{aligned} 6x^2 - 10 &= 0 \qquad | +10 \\ 6x^2 &= 10 \qquad |: 6 \\ x^2 &= \frac{5}{3} \qquad | \sqrt{} \\ x_{1,2} &= \pm\sqrt{\frac{5}{3}} \end{aligned}$$

Diese Werte für x werden in $f'''(x)$ eingesetzt, um zu überprüfen, ob es sich um echte Wendepunkte handelt.

$f'''\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}\right) = 12 \cdot \left(-\sqrt{\frac{5}{3}}\right) \neq 0$: Wendepunkt

$f'''\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right) = 12 \cdot \sqrt{\frac{5}{3}} \neq 0$: Wendepunkt

Wie oben werden auch hier die zugehörigen y-Werte bestimmt.

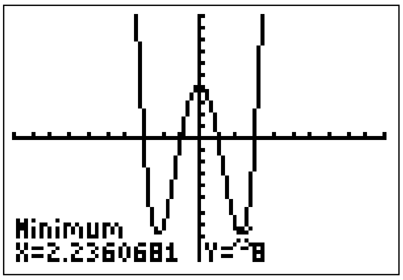
$$f\left(-\sqrt{\tfrac{5}{3}}\right) = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^4 - 5\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2 + 4{,}5 = \frac{1}{2}\cdot\frac{25}{9} - 5\cdot\frac{5}{3} + 4{,}5 = -2{,}\overline{4}$$

$$f\left(\sqrt{\tfrac{5}{3}}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^4 - 5\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2 + 4{,}5 = \frac{1}{2}\cdot\frac{25}{9} - 5\cdot\frac{5}{3} + 4{,}5 = -2{,}\overline{4}$$

Daraus ergeben sich die Wendepunkte $W_1\left(-\sqrt{\tfrac{5}{3}}\,\middle|\,-2{,}\overline{4}\right)$ und $W_2\left(\sqrt{\tfrac{5}{3}}\,\middle|\,-2{,}\overline{4}\right)$.

►► **Lösungsweg B: Lösung mit dem GTR**

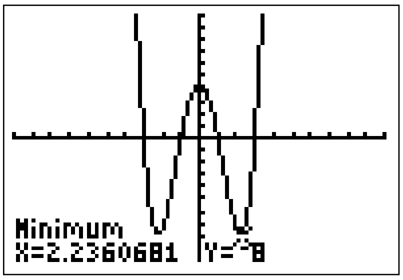
Zeichne den Graphen von f und bestimme mit $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \text{TRACE (CALC)} \rightarrow \text{MAXIMUM}}$ bzw. MINIMUM die Hoch- und Tiefpunkte des Graphen.



Es ergeben sich der Hochpunkt $H\,(0 \mid 4{,}5)$, sowie die beiden Tiefpunkte $T_1\,(\approx 2{,}236 \mid -8)$ und $T_2\,(\approx -2{,}236 \mid -8)$.

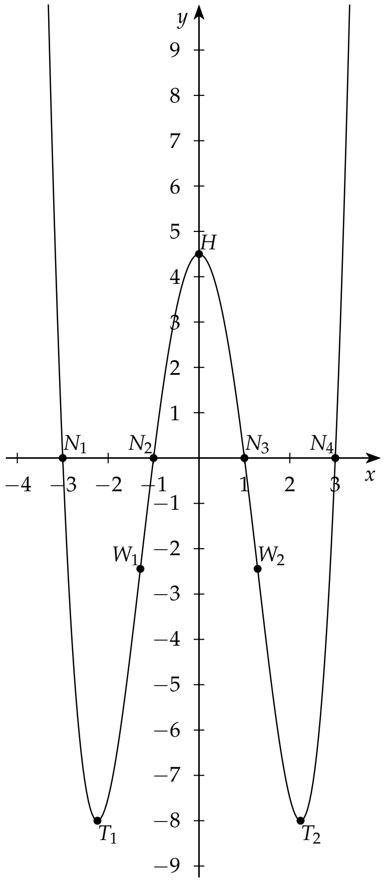
Nun zu den Wendepunkten. Sie sind Punkte mit extremer Steigung, also die **Extrempunkte** der ersten Ableitung.

Zeichne den Graphen von f' und bestimme mit $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \text{TRACE (CALC)} \rightarrow \text{MAXIMUM}}$ bzw. MINIMUM die Hoch- und Tiefpunkte des Graphen.



Der GTR gibt dir hier nur die x-Koordinaten der Wendepunkte aus, nämlich $x_1 \approx -1{,}29$ und $x_2 \approx 1{,}29$. Setze diese Werte wie oben in die Gleichung von f ein, um die zugehörigen y-Koordinaten zu bestimmen und es ergeben sich die beiden Wendepunkte $W_1\,(\approx -1{,}29 \mid -2{,}\overline{4})$ und $W_2\,(\approx 1{,}29 \mid -2{,}\overline{4})$.

▶ Graph von f zeichnen



▶ Symmetrie des Graphen beschreiben

Der Graph verläuft achsensymmetrisch zur y-Achse.

b) **▶ Inhalt der eingeschossenen Fläche bestimmen** (10P)

▶▶ Lösungsweg A: Handschriftliche Lösung

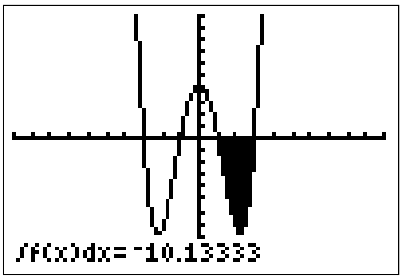
Bestimme den Inhalt A der eingeschlossenen Fläche über die Stammfunktion.

$$\begin{aligned}
A &= \left| \int_1^3 \left(\frac{1}{2}x^4 - 5x^2 + 4,5 \right) \, \mathrm{d}x \right| \\
&= \left| \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}x^5 - 5 \cdot \frac{1}{3}x^3 + 4,5x \right]_1^3 \right| \\
&= \left| \left[\frac{1}{10}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 4,5x \right]_1^3 \right| \\
&= \left| \left(\frac{1}{10} \cdot 3^5 - \frac{5}{3} \cdot 3^3 + 4,5 \cdot 3 \right) - \left(\frac{1}{10} \cdot 1 - \frac{5}{3} \cdot 1 + 4,5 \right) \right| \\
&= \left| (24,3 - 45 + 13,5) - (2,9\overline{3}) \right| \\
&= \left| -10,1\overline{3} \right| = 10,1\overline{3}
\end{aligned}$$

Der Inhalt der eingeschlossenen Fläche beträgt $10,1\overline{3}$ FE.

►► Lösungsweg B: Lösung mit dem GTR

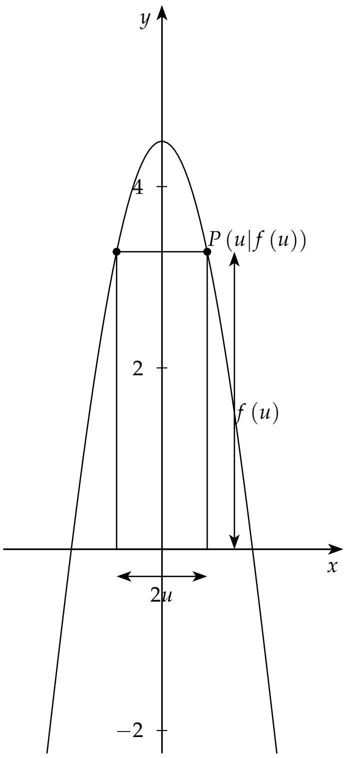
Zeichne den Graphen von f und bestimme mit $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \text{TRACE (CALC)} \rightarrow \int f(x)\,\mathrm{d}x}$ das Integral im angegebenen Bereich.



Das Integral ist negativ, weil die Fläche sich unterhalb der x-Achse befindet. Der Inhalt der eingeschlossenen Fläche ist jedoch immer ein positiver Wert und beträgt somit etwa $10{,}1\overline{3}$ FE.

c) **► Gleichung für den Umfang des Rechtecks bestimmen** (12P)

Sehen wir uns dieses Rechteck zunächst in einer Skizze an:



Der Abstand der Nullstellen beträgt 2 LE.
Die Kante des Rechtecks, die auf der x-Achse liegt hat somit eine Länge von $2u$ LE, ebenso wie die gegen über.
Die Kanten links und rechts besitzen die Länge $f(u)$, d.h. $\frac{1}{2}u^4 - 5u^2 + 4{,}5$ LE.

Für den Umfang des Rechtecks ergibt sich somit die Gleichung:

$$\begin{aligned} U(u) &= 2 \cdot 2u + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}u^4 - 5u^2 + 4{,}5\right) \\ &= 4u + u^4 - 10u^2 + 9 \\ &= u^4 - 10u^2 + 4u + 9 \end{aligned}$$

► Umfang des Rechtecks bestimmen, wenn die untere Kante 1 LE lang ist

Für die Länge der unteren Kante des Rechtecks gilt: $2u$. Diese Strecke soll 1 LE lang sein. Daraus lässt sich ein Wert für u bestimmen, nämlich $u = 0{,}5$.

Somit lässt sich der Umfang des Rechtecks für $u = \frac{1}{2}$ bestimmen:

$$U\left(\tfrac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 - 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} + 13 = 8,5625$$

Wenn die Kante auf der x-Achse genau 1 LE lang ist, beträgt der Umfang des Rechtecks $8,5625$ LE.

d) **► Gleichung der Parabel bestimmen** (12P)

Wir wissen, dass die Parabel die Form $ax^2 + b$ besitzt und durch die Punkte $N(-1|0)$ und $M(0|4,5)$ verlaufen soll.
Wir setzen also die Koordinaten dieser Punkte nacheinander in die Gleichung ein.

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + b \quad && \mid x = -1, y = 0 \\ 0 &= a \cdot (-1)^2 + b && \\ 0 &= a + b && \mid -a \\ -a &= b && \end{aligned}$$

Damit ergibt sich als neue Gleichung:

$$y = ax^2 - a$$

$$\begin{aligned} y &= ax^2 - a \quad && \mid x = 0, y = 4,5 \\ 4,5 &= a \cdot 0 - a && \\ 4,5 &= -a && \\ -4,5 &= a && \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich als Parabelgleichung:

$$y = -4,5x^2 + 4,5$$

► Parabel zeichnen