1. **▶ Rechtwinkliges, gleichschenkliges Dreieck nachweisen** (10BE)

1. Schritt: Rechtwinkligkeit nachweisen

Das Dreieck besitzt die drei Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{CA}$, die jeweils zu zweit in einer Ecke aufeinander treffen und einen Winkel bilden. Es ist zu zeigen, dass einer dieser Winkel **rechtwinklig** ist, d.h. dass zwei der Seiten **senkrecht** aufeinander stehen.

Prüfe mit dem **Skalarprodukt**, welche der beiden Seiten den rechten Winkel bilden: Stehen zwei Vektoren senkrecht aufeinander, so ist ihr Skalarprodukt **Null**.

$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 5 & - & 3 \\ 2 & - & (-2) \\ 0 & - & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & - & 5 \\ 6 & - & 2 \\ 2 & - & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \cdot (-4) + 4 \cdot 4 + (-4) \cdot 2 = -8 + 16 - 8 = 0$$

Damit ist nachgewiesen, dass sich die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ in einem rechten Winkel treffen. Das Dreieck ist somit **rechtwinklig**.

2. Schritt: Gleichschenkligkeit nachweisen

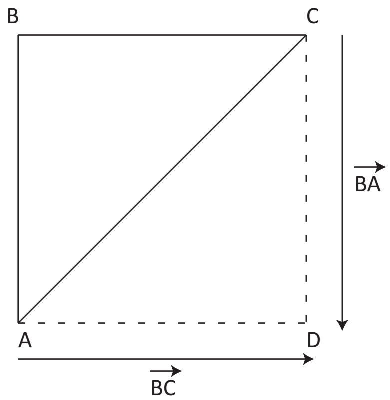
Das Dreieck ABC soll **gleichschenklig** und **rechtwinklig** sein, es hat also die Form eines **Geodreiecks**. Im Geodreieck liegt der rechte Winkel gegenüber der Grundseite und er wird von den beiden Schenkeln eingeschlossen. Zeige also, dass die Dreiecksseiten $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ gleich lang sind.

$$\overline{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$\overline{BC} = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{36} = 6$$

Damit ist gezeigt, dass das Dreieck ABC gleichschenklig und rechtwinklig ist mit der Grundseite $\overline{AC}$ und den Schenkeln $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$.

▶ Koordinaten von D berechnen



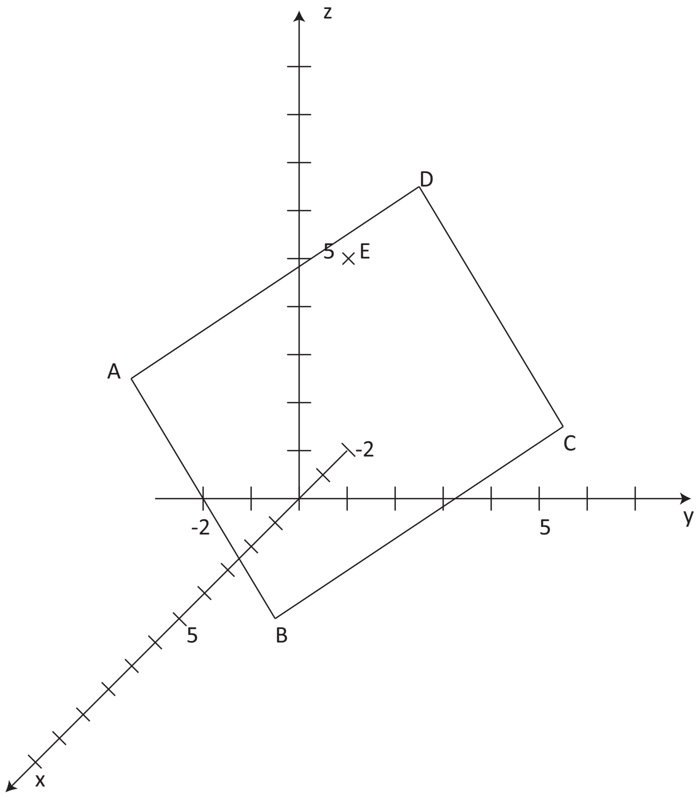
Betrachte zunächst allgemein, wie man aus einem rechtwinkligen, gleichschenkligen Dreieck ein Quadrat machen kann. Zeichne hierzu eine Skizze.
An den Punkt A wird der Vektor $\overrightarrow{BC}$ „angehängt“, oder an den Punkt B der Vektor $\overrightarrow{BA}$. In beiden Fällen erhältst du die Koordinaten von D.

Einen Vektor an einen Punkt „anzuhängen“ bedeutet: **Den Ortsvektor des Punktes und den anzuhängenden Vektor addieren**:

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten von D lauten $D(-1 \mid 2 \mid 6)$.

▶ **Punkte A, B, C, D und E in Koordinatensystem darstellen**



2. ▶ **Parametergleichung von F angeben** (7BE)

Verwende z.B. den Ortsvektor zum Punkt A als **Stützvektor**. Als **Richtungsvektoren** kannst du die Vektoren verwenden, die in Aufgabenteil 1. bereits verwendet wurden, nämlich $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$.

$$F: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

▶ **Koordinatengleichung von F ermitteln**

Die Koordinatengleichung einer Ebene hat immer die Form $F: ax + by + cz = d$. Du weißt, dass der Vektor $\overrightarrow{x}$ sich umschreiben lässt zu $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Forme also die Parametergleichung von F mit Hilfe eines linearen Gleichungssystem (LGS) so um, dass sie am Ende die Form einer Koordinatengleichung besitzt.

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & x & = & 3 + 2r - 4s \\ \text{II} & y & = & -2 + 4r + 4s \\ \text{III} & z & = & 4 - 4r + 2s \end{array}$$

Betrachte die Gleichung I und löse auf nach r:

$$\begin{aligned} x &= 3 + 2r - 4s && \mid -3+4s \\ x - 3 + 4s &= 2r && \mid : 2 \\ \tfrac{x-3+4s}{2} &= r \end{aligned}$$

Setze dieses Ergebnis ein in II:

$$\begin{aligned} y &= -2 + 4 \cdot \tfrac{x-3+4s}{2} + 4s \\ y &= -2 + 2x - 6 + 8s + 4s \\ y &= -8 + 2x + 12s && \mid +8-2x \\ y + 8 - 2x &= 12s && \mid : 12 \\ \tfrac{y+8-2x}{12} &= s \end{aligned}$$

Setze r ein in III:

$$\begin{aligned} z &= 4 - 4 \cdot \tfrac{x-3+4s}{2} + 2s \\ z &= 4 - 2x + 6 - 8s + 2s \\ z &= 10 - 2x - 6s && \mid s = \tfrac{y+8-2x}{12} \\ z &= 10 - 2x - 6 \cdot \tfrac{y+8-2x}{12} \\ z &= 10 - 2x - \tfrac{1}{2}y - 4 + x \\ z &= 6 - x - \tfrac{1}{2}y && \mid +x+\tfrac{1}{2}y \\ z + x + \tfrac{1}{2}y &= 6 && \mid \cdot 2 \\ 2x + y + 2z &= 12 \end{aligned}$$

Die Ebenengleichung in Koordinatenform lautet $F: 2x + y + 2z = 12$.

3. ▶ **Gleichung von H bestimmen** (5BE)

Die Ebene H soll **senkrecht** auf der Ebene F stehen. Benötigt wird also ein neuer **Richtungsvektor**, der senkrecht auf **beide Richtungsvektoren** von F steht.

Wie oben benutzen wir das **Skalarprodukt**, da es sich um Vektoren handelt, die senkrecht auf einander stehen.

Der neue Richtungsvektor $\overrightarrow{v}$ muss sowohl senkrecht auf $\overrightarrow{AB}$ als auch auf $\overrightarrow{BC}$ stehen. Das Skalarprodukt von $\overrightarrow{v}$ mit jedem der beiden Vektoren muss also jeweils **Null** ergeben:

$$\overrightarrow{v} \circ \overrightarrow{AB} = 0 \qquad \overrightarrow{v} \circ \overrightarrow{BC} = 0$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$2v_1 + 4v_2 - 4v_3 = 0 \qquad -4v_1 + 4v_2 + 2v_3 = 0$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich ein LGS:

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \text{I} & 2v_1 & + & 4v_2 & - & 4v_3 & = & 0 \\ \text{II} & -4v_1 & + & 4v_2 & + & 2v_3 & = & 0 \quad | \text{ Rechne: I}-\text{II} \\ \hline \text{I} & 2v_1 & + & 4v_2 & - & 4v_3 & = & 0 \\ \text{IIa} & 6v_1 & & & - & 6v_3 & = & 0 \end{array}$$

Aus IIa folgt: $v_1 = v_3$. Setze dies ein in I:

$$\begin{aligned} 2v_3 + 4v_2 - 4v_3 &= 0 \\ 4v_2 - 2v_3 &= 0 \quad | +2v_3 \\ 4v_2 &= 2v_3 \quad |: 4 \\ v_2 &= \tfrac{1}{2}v_3 \end{aligned}$$

Setze nun $v_2 = \frac{1}{2}v_3$ und $v_1 = v_3$ ein in die allgemeinen Koordinaten von $\overrightarrow{v}$ und erhalte: $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_3 \\ \frac{1}{2}v_3 \\ v_3 \end{pmatrix}$.

Du kannst jetzt einen beliebigen Wert für v_3 wählen. Dies scheint zwar seltsam, ist es aber nicht einmal: Die **Richtung** von $\overrightarrow{v}$ ändert sich dadurch nämlich nicht, nur die **Länge**. Da nur wichtig ist, dass $\overrightarrow{v}$ senkrecht auf der Ebene F steht und nicht, wie lang der Vektor ist, kannst du jeden beliebigen Wert für v_3 wählen. Wähle z.B. $v_3 = 2$: $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Der Vektor $\overrightarrow{v}$ steht nun also senkrecht auf die Ebene F. Für die Ebene H benötigst du aber noch einen weiteren Richtungsvektor. Wähle hierzu einen der Ebene F, z.B. den Vektor $\overrightarrow{BC}$. Auch den Stützvektor kannst du von der Ebene F übernehmen:

$$H: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OA} + k \cdot \overrightarrow{v} + l \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4. ▶ **Rechnung interpretieren** (8BE)

Gehen wir die Rechnung Schritt für Schritt durch.

1. Schritt: Gerade g wird gesucht

Als Stützvektor für g wird der Ortsvektor $\overrightarrow{e}$ zum Punkt $E(8 \mid 5 \mid 9)$ gewählt. g verläuft also durch E.

Was den Richtungsvektor angeht, so hast du eben etwas sehr ähnliches ausgerechnet: Die Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ sind die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$. Das Skalarprodukt des Richtungsvektors $\overrightarrow{n}$ mit diesen beiden Vektoren soll jeweils Null sein: Es ist also ein Stützvektor gesucht, der **senkrecht** auf jeden der beiden Richtungsvektoren von F steht und somit senkrecht auf die gesamte Ebene F.

Die Gerade g verläuft also **senkrecht** zur Ebene F durch den Punkt E.

2. Schritt: Punkt L wird gesucht

Zunächst erkennst du, dass L auf der Geraden g liegen muss. Was nun passiert, ist recht leicht zu erklären: Die Gleichung der Geraden g wird „aufgeteilt" in die einzelnen Zeilen für x, y und z. Nun werden diese Zeilen eingesetzt in die Koordinatengleichung der Ebene F. Auf diese Weise wird der **Schnittpunkt** der Geraden g mit der Ebene F ermittelt.

g und F schneiden sich im Punkt L.

3. Schritt: Volumen berechnen

Zuletzt werden die **Beträge** der Vektoren betrachtet. Der Betrag eines Vektors entspricht immer seiner **Länge**. Um die Volumenberechnung richtig nachvollziehen zu können, betrachtest du Aufgabenteil 1. Hier hast du das Dreieck ABC zu einem **Quadrat** $ABCD$ erweitert, wobei die Seite $\overline{AB}$ eine Seite des Quadrats ist. Somit wird mit $\left|\overrightarrow{AB}\right|^2$ der **Flächeninhalt** des Quadrats $ABCD$ ermittelt.

Die Strecke $\overline{LE}$ liegt auf der Geraden g und verbindet den Schnittpunkt von g und F mit dem Punkt E. Der Punkt E bildet also die **Spitze einer Pyramide** mit der Grundfläche $ABCD$. Die Strecke $\overline{LE}$ ist dabei genau die **Höhe** der Pyramide.

Das Volumen einer Pyramide berechnet sich über die Formel $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$, wobei G die Grundfläche und h die Höhe ist. Das Endergebnis ist also das **Volumen** der Pyramide, die von der Grundfläche $ABCD$ und der Spitze E gebildet wird.