1.1 ▶ **Entscheidung über die Steigung der Senkrechten** (1BE)

Für die Steigung m_g der Geraden g und der Steigung einer ihrer Senkrechten m_s gilt die Beziehung $m_g \cdot m_s = -1$.

Jede Senkrechte hat also die Steigung $m_s = \frac{-1}{m_g} = \frac{-1}{-\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}$.

Somit gibt Feld 5 die richtige Antwort an.

1.2 ▶ **Entscheidung über die Gleichung der Ableitungsfunktion** (1BE)

Die Funktion f mit $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$ stellt eine verkette Funktion dar, die mit der **Kettenregel** („äußere Ableitung mal innere Ableitung“) gebildet wird. Die äußere Funktion ist dabei die e-Funktion mit $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$:

$f'(x) = \mathrm{e}^{2x} \cdot (2x)' = \mathrm{e}^{2x} \cdot 2 = 2 \cdot \mathrm{e}^{2x}$.

Somit zeigt Feld 2 die richtige Antwort.

1.3 ▶ **Entscheidung über die Anzahl der Lösungen für die Gleichung** (1BE)

Für die Gleichung $\frac{1}{2}x \cdot (x^2 - 1) = 0$ gilt: Dieses Produkt aus den Faktoren $\frac{1}{2}x$ und $x^2 - 1$ ist genau dann gleich Null, wenn entweder $\frac{1}{2}x = 0$ oder $x^2 - 1 = 0$ gilt.

Aus der ersten Bedingung ergibt sich die erste Lösung $x_1 = 0$.

Aus der zweiten Bedingung ergibt sich über $x^2 = 1$ die zweite und auch die dritte Lösung $x_{2/3} = \pm 1$.

Die Gleichung hat daher drei Lösungen. Feld 4 ist hier das richtige Feld.

1.4 ▶ **Entscheidung über die Lagebeziehung der beiden Geraden** (1BE)

An den Geradengleichungen kannst du erkennen, dass sowohl g als auch h den Punkt $P(5; 7; 2)$ als Aufpunkt besitzen. Die Geraden müssen sich also entweder in diesem Punkt schneiden oder ganz identisch sein.

Identisch sind sie, wenn die beiden Richtungsvektoren linear abhängig, also **Vielfache** voneinander sind:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow \quad k = -1 \\ \\ \Rightarrow \quad k = 1 \end{array}$$

Da diese k-Werte in der ersten und dritten Zeile einen Widerspruch bilden, sind die Vektoren nicht linear abhängig. Die Geraden g und h sind daher nicht identisch, sie schneiden sich im Punkt $P(5; 7; 2)$.

Letztlich bleibt zu überprüfen, ob sie sich auch **senkrecht** schneiden. Dazu müssten die Richtungsvektoren senkrecht aufeinander stehen, ihr Skalarprodukt also gleich Null sein:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot (-3) + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = -9 + 0 + 1 = -8 \neq 0.$$

Die Geraden schneiden sich also nicht senkrecht. Feld 3 gibt hier die richtige Antwort an.

1.5 ▶ **Entscheidung über die Wahrscheinlichkeit** (1BE)

Da zwei von den kongruenten (gleich großen) Segmenten mit der Zahl „0" belegt sind, wird die „0" mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ angezeigt.

Entsprechend belegt die „1" eines der drei Segmente und tritt daher mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ ein.

Das Ereignis E: „Es werden zwei gleiche Zahlen ermittelt" gliedert sich jetzt in den Fall, dass zweimal die „0" gedreht wird und in den Fall, dass zweimal die „1" gedreht wird:

$$P(E) = P(0 \to 0) + P(1 \to 1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}.$$

Somit gibt hier Feld 5 die richtige Antwort an.

2.1 ▶ **Aussage über das Vorzeichen des Graphenanstiegs bei $x = 2$** (2BE)

Der Graphenanstieg wird durch die erste Ableitung beschrieben, deren Graph hier gegeben ist. Da bei $x = 2$ die erste Ableitung negativ ist, also $f'(2) < 0$ gilt, ist auch der Graphenanstieg negativ. Das Vorzeichen des Anstiegs ist also ein Minuszeichen.

▶ **Aussage über die Monotonieart der Funktion für $0{,}5 < x < 1{,}5$**

Der Graph von f ist monoton steigend für alle x mit $f'(x) > 0$ und monoton fallend für alle x mit $f'(x) < 0$. In der Abbildung kannst du erkennen, dass der Graph von f' im Intervall $0{,}5 < x < 1{,}5$ **unterhalb** der x-Achse verläuft und somit **negative** Funktionswerte annimmt: Im gesamten Bereich ist also $f'(x) < 0$.

In diesem Bereich ist der Graph von f daher **streng monoton fallend**.

2.2 ▶ **Begründung, dass Aussage 1 für den Graphen von f wahr ist** (2BE)

Die Aussage ist richtig, da der Graph von f' an der Stelle $x = 0$ einen Extrempunkt aufweist.

(Exakter: Da der Graph von f' bei $x = 0$ einen Extrempunkt hat, gilt $(f'(0))' = f''(0) = 0$ und $f'''(0) \neq 0$. Damit sind die Bedingungen für einen Wendepunkt an der Stelle $x = 0$ für den Graphen von f erfüllt.)

▶ **Begründung, dass Aussage 2 für den Graphen von f wahr ist**

Der Anstieg des Graphen an der Stelle $x = -1$ beträgt $m = f'(-1) = 0$. Die Tangente an den Graphen von f in diesem Punkt besitzt dieselbe Steigung.

Ein Anstieg von 0 sagt aus, dass die Tangente eine horizontale Gerade ist, also eine Parallele zur x-Achse.

3 ▶ **Nachweis, dass die drei Punkte ein Dreieck bilden** (2BE)

Die drei Punkte A, B und C bilden genau dann ein Dreieck, wenn sie **nicht** auf einer Geraden liegen. Um dies zu überprüfen, können wir beispielsweise die Gleichung der Geraden g durch die Punkte A und B aufstellen und überprüfen, ob auch der Punkt C auf dieser Geraden liegt:.

Für die Gerade g gilt zunächst:

$$g\colon \vec{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Jetzt überprüfen wir, ob C auf dieser Geraden liegt.

Für diese Punktprobe mit dem dritten Punkt $C(0; -1; 6)$ setzen wir die Koordinaten des Ortsvektors von C für $\vec{x}$ in die Gleichung dieser Geraden ein:

$$C \text{ in } g: \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow \quad t = -2 \\ \Rightarrow \quad t = -2 \\ \Rightarrow \quad t = 8 \end{array}$$

Die Werte für k widersprechen sich, daher liegt C nicht auf der Geraden g durch A und B. Die drei Punkte bilden somit ein Dreieck ABC.

4 ▶ **Berechnung der Wahrscheinlichkeit von Ereignis A** (4BE)

Da es in der Urne nur eine blaue Kugel gibt, muss beim Ereignis A zunächst eine nicht-blaue Kugel gezogen werden, danach eine blaue.

In der Urne sind anfangs insgesamt 8 Kugeln, davon sind 7 nicht-blau. Eine solche Kugel wird also mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{7}{8}$ gezogen. Jetzt befinden sich in der Urne nur noch 7 Kugeln. Die eine blaue Kugel wird hier jetzt mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{7}$ gezogen.

Für das Ereignis A erhalten wir also nach der Pfadregel die Wahrscheinlichkeit

$$P(A) = P(\text{nicht-blau} \to \text{blau}) = \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{8}.$$

▶ **Berechnung der Wahrscheinlichkeit von Ereignis B**

Da in der Urne nur eine blaue Kugel ist, können im Ereignis B nur entweder nacheinander zwei gelbe oder zwei weiße Kugeln gezogen werden. Es wird **ohne** Zurücklegen gezogen.

Zieht man anfangs eine der 5 gelben aus den insgesamt 8 Kugeln, so geschieht dies mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{5}{8}$. Jetzt sind noch 4 gelbe Kugeln von insgesamt 7 in der Urne, also ist jetzt die Wahrscheinlichkeit, eine gelbe Kugel zu ziehen, $\frac{4}{7}$.

Eine der 2 weißen Kugeln wird hingegen am Anfang mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{8}$ gezogen, im zweiten Schritt dann mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{7}$.

Für die Wahrscheinlichkeit von Ereignis B gilt dann nach der Pfadregel:

$$P(B) = P(\text{gelb} \to \text{gelb}) + P(\text{weiß} \to \text{weiß}) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} + \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{10}{28} + \frac{1}{28} = \frac{11}{28}.$$