Aufgabe II 2.1

a) **► Schnittpunkt der Geraden ermitteln** (7VP)

Alle Punkte in der x_1x_2-Ebene haben die Koordinaten $P(x_1 \mid x_2 \mid 0)$. Die Geradengleichung g gibt dir für jedes t die Koordinaten eines Punktes, der auf der Geraden g liegt. Setze also einen Wert für t ein, sodass die dritte Komponente (also x_3) 0 ist:

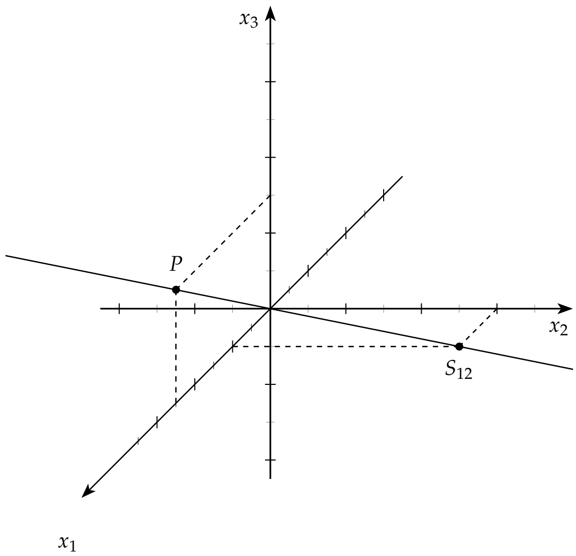
$$3 + t \cdot 1 = 0 \qquad \Longrightarrow t = -3$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten des Schnittpunkts der Geraden mit der x_1x_2-Ebene lauten $S_{12}(2 \mid 6 \mid 0)$.

► Gerade g zeichnen

Du zeichnest eine Gerade in ein dreidimensionales Koordinatensystem ein, indem du sie durch zwei Punkte der Geraden zeichnest. Nimm hierfür am bestem den Stützpunkt der Geraden $P(5 \mid 0 \mid 3)$ und den eben berechneten Schnittpunkt $S_{12}(2 \mid 6 \mid 0)$. Trage diese beiden Punkte ein und ziehe dann die Gerade durch diese beiden Punkte. Denke daran, dass eine Längeneinheit auf der x_1-Achse der Diagonalen eines Kästchens entspricht:



► Schnittwinkel der Geraden g und der x_1x_2-Ebene berechnen

Maße von Schnittwinkeln zwischen einer Geraden mit Richtungsvektor $\overrightarrow{v}$ und einer Ebenen mit Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ kannst du mit der folgenden Formel berechnen:

$$\sin(\alpha) = \frac{|\overrightarrow{v} \circ \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{v}| \cdot |\overrightarrow{n}|}$$

Der Normalenvektor der $x_1 - x_2$-Ebene lautet $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Eingesetzt in die Formel ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha) &= \frac{\left|\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|} \\
&= \frac{|1\cdot 0+(-2)\cdot 0+1\cdot 1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}\cdot\sqrt{0^2+0^2+1^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\sqrt{1}=\frac{1}{\sqrt{6}} \\
\alpha &= \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\approx 24{,}095\,^\circ.
\end{aligned}$$

Die Maßzahl des Schnittwinkels von g und der x_1x_2-Ebene beträgt $24{,}1\,^\circ$.

► Koordinaten von F ermitteln

Es ist ein Punkt F gesucht, der auf g liegt und vom Punkt A den kleinsten Abstand hat. Den Abstand eines **Punktes** zu einer **Geraden** kannst du mit Hilfe einer **Hilfsebene** H bestimmen.

Der kleinste Abstand zu einer Geraden ist immer eine **orthogonale Strecke** zu dieser Geraden. Die Hilfsebene H verläuft also orthogonal zur Geraden g und beinhaltet den Punkt A. Du kannst als **Normalenvektor** von H den **Richtungsvektor** von g benutzen. H hat dann zunächst die Koordinatenform $H:\ x_1-2x_2+x_3=d$.

Da A ein Punkt dieser Ebene sein soll, muss er die Ebenengleichung erfüllen. Du kannst also die Koordinaten von A in die Koordinatengleichung der Ebene einsetzen und nach d auflösen:

$$\begin{aligned}
d &= 4{,}5-2\cdot 6+3{,}5 \\
&= 8-12 \\
&= -4
\end{aligned}$$

Somit lautet die Koordinatengleichung der Hilfsebene $H:\ x_1-2x_2+x_3=-4$.

Der Punkt auf g mit dem kleinsten Abstand zu A ist nun der **Schnittpunkt von g und H**. Du kannst ihn berechnen, indem du die jeweiligen Koordinaten der Gerade g in die Koordinatengleichung der Ebene für x_1, x_2 und x_3 einsetzt:

$$\begin{aligned}
(5+t)-2\cdot(0-2t)+(3+t) &= -4 \\
5+t+4t+3+t &= -4 \\
8+6t &= -4 \qquad |\ -8 \\
6t &= -12 \qquad |:6 \\
t &= -2
\end{aligned}$$

Die Koordinaten von F erhältst du, indem du $t=-2$ in die Geradengleichung von g einsetzt:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

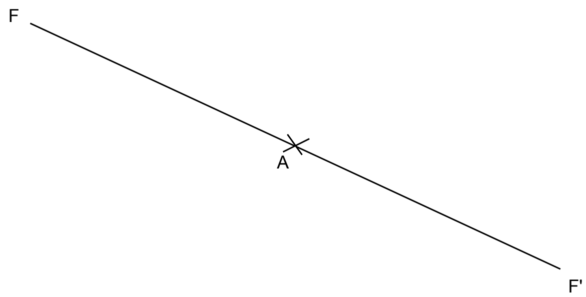
Die Koordinaten des Punktes F lauten $F(3 \mid 4 \mid 1)$.

▶ Gleichung der Geraden h aufstellen

Um die Gleichung der Spiegelgeraden von h aufzustellen, benötigst du die Koordinaten **zweier Punkte** dieser Geraden. Wähle also zwei Punkte, die auf der Geraden h liegen und **spiegle diese** am Punkt A. Zwei mögliche Punkte, die sich anbieten, wären z.B. $F(3 \mid 4 \mid 1)$ und $S_{12}(2 \mid 6 \mid 0)$.

Die Koordinaten der Spiegelpunkte kannst du so berechnen:

$\overrightarrow{OF'} = \overrightarrow{OF} + 2 \cdot \overrightarrow{AF}$,
und
$\overrightarrow{OS'_{12}} = \overrightarrow{OS_{12}} + 2 \cdot \overrightarrow{AS_{12}}$



$$\overrightarrow{S_{12}A} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 6 \\ 3,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0 \\ 3,5 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 6 \\ 3,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OS'} = \overrightarrow{OS_{12}} + 2 \cdot \overrightarrow{S_{12}A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0 \\ 3,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OF'} = \overrightarrow{OF} + 2 \cdot \overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2 \\ 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Die Gerade h verläuft durch die Punkte $S'_{12}(7 \mid 6 \mid 7)$ und $F'(6 \mid 8 \mid 6)$. Berechne als nächstes den Richtungsvektor von h:

$$\overrightarrow{S'F'} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Du kannst als Stützvektor der Geraden h entweder $\overrightarrow{OS'}$ oder $\overrightarrow{OF'}$ nehmen. Die Gleichung von h lautet dann $h: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; t \in \mathbb{R}$.

b) ▶ **Entstehung einer Ebene bei Rotation der Geraden g begründen** (5VP)

Der Punkt F ist der Punkt auf g, der den kürzesten Abstand zum Punkt A hat. Daraus folgt, dass die Gerade durch A und F im rechten Winkel zur Geraden g verläuft. Bei der Rotation der Geraden g um die Gerade durch A und F entsteht also eine Art „Scheibe“, die senkrecht zur Geraden durch A und F verläuft. Diese „Scheibe“ liegt in einer Ebene.

▶ **Gleichung der Ebene nachweisen**

Die Ebene E hat das Lot $\overrightarrow{FA}$. Somit kannst du diesen Vektor als **Normalenvektor der Ebene** E benutzen. In der Teilaufgabe a) hast du diesen Richtungsvektor bereits ausgerechnet.

$$\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$

Mit diesen Werten stellst du die Gleichung der Ebene E auf:

$$\begin{aligned} E:\ & 1,5x_1 + 2x_2 + 2,5x_3 = d \\ & 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = d \end{aligned}$$

Ein Punkt, der in der Ebene liegt, heißt F. Setze die Koordinaten von F in die Ebenengleichung ein, um den Wert für d zu berechnen:

$$\begin{aligned} d &= 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 1 \\ &= 9 + 16 + 5 \\ &= 30 \end{aligned}$$

Somit stimmt die Gleichung der Ebene.

▶ **Lage von P und Q auf verschiedenen Seiten überprüfen**

Die Punkte P und Q liegen auf anderen Ebenen, die parallel zur Ebene E sind. Sie haben also ebenfalls die Koordinatengleichung $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = d$. Setze die Punkte in diese Gleichung ein, um d_P und d_Q zu erhalten. Sind beide Werte größer oder kleiner als 30 (Wert für d der Ebene E), liegen die Punkte auf einer Seite der Ebene.

$$\begin{aligned} d_P &= 3 \cdot 18 + 4 \cdot (-9) + 5 \cdot 1 \\ &= 54 - 36 + 5 \\ &= 23 \qquad 23 < 30 \\ d_Q &= 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 + 5 \cdot (-9) \\ &= -6 + 4 - 45 \\ &= -47 \qquad -47 < 30 \end{aligned}$$

Beide Werte sind kleiner als 30. Somit liegen die Punkte P und Q nicht auf verschiedenen Seiten von E.

Aufgabe II 2.2

▶ Verhältnis von CS zu SD (4VP)

Das Verhältnis erhältst du mit der Berechnung von Vektoren.

Du „kennst" die Beträge einiger Vektoren; du hast zwar keine konkreten Werte, aber du weißt z.B., dass die $\overline{CD} = \overline{AD}$ und dass $\overline{MC} = \overline{MD}$ ist. Versuche nun, mit Hilfe von **geschlossenen Vektorzügen**, die Vektoren $\overrightarrow{PS}$ und $\overrightarrow{SQ}$ als **Linearkombinationen** von Vektoren auszudrücken, über die du mehr weißt.

Eine Möglichkeit wäre, die unbekannten Vektoren $\overrightarrow{PS}$ und $\overrightarrow{SQ}$ durch Linearkombinationen von $\overrightarrow{MC}$ und $\overrightarrow{MD}$ auszudrücken: die beiden Vektoren sind **nicht** parallel und sie spielen eine wichtige Rolle für die Lage von P und Q.

1. Schritt: Geschlossenen Vektorzug durch S erstellen

Stelle zuerst einen geschlossenen Vektorzug auf. Er sollte möglichst klein sein und durch den Punkt S gehen, z.B.:

$$\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CS} + \overrightarrow{SP} = \overrightarrow{0}$$

2. Schritt: Vektoren durch $\overrightarrow{MC}$ und $\overrightarrow{MD}$ beschreiben

Beschreibe die Vektoren $\overrightarrow{PC}$, $\overrightarrow{CS}$ und $\overrightarrow{SP}$ mit den Vektoren $\overrightarrow{MC}$ und $\overrightarrow{MD}$.

Laut Aufgabenstellung ist $\overrightarrow{MP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{MC}$. Also ist $\overrightarrow{PC} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{MC}$.

Für $\overrightarrow{CS}$ benötigst du nun einen Parameter r, der das noch unbekannte Verhältnis von $\overrightarrow{CS}$ zu $\overrightarrow{SD}$ angibt:

$$\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$$
$$\overrightarrow{CS} = r \cdot \overrightarrow{CD} = r \cdot \left(-\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right)$$

Für $\overrightarrow{SP}$ benötigst du einen weiteren Parameter s, der das ebenfalls unbekannte Verhältnis von $\overrightarrow{PS}$ zu $\overrightarrow{SQ}$ angibt:

$$\overrightarrow{QP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{MC} - \frac{5}{4}\overrightarrow{MD}$$
$$\overrightarrow{PS} = s \cdot \overrightarrow{QP} = s \cdot \left(\frac{3}{4}\overrightarrow{MD} - \frac{5}{4}\overrightarrow{MD}\right)$$

3. Schritt: Parameter r und s bestimmen

Setze nun alles in den geschlossenen Vektorzug ein. Du kannst die Gleichung nach r bzw. s lösen, indem du $\overrightarrow{MC}$ und $\overrightarrow{MD}$ ausklammerst:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CS} + \overrightarrow{SP} &= \overrightarrow{0} \\ \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{MC}\right) + \left(r \cdot \left(-\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right)\right) + \left(s \cdot \left(\frac{3}{4}\overrightarrow{MC} - \frac{5}{4}\overrightarrow{MD}\right)\right) &= \overrightarrow{0} && \text{ausmultiplizieren} \\ \frac{1}{4}\overrightarrow{MC} - r \cdot \overrightarrow{MC} + r \cdot \overrightarrow{MD} + s \cdot \frac{3}{4}\overrightarrow{MC} - s \cdot \frac{5}{4}\overrightarrow{MD} &= \overrightarrow{0} && \text{ausklammern} \\ \overrightarrow{MC}\left(\frac{1}{4} - r + \frac{3}{4}s\right) + \overrightarrow{MD}\left(r - \frac{5}{4}s\right) &= \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

$\overrightarrow{MC}$ und $\overrightarrow{MD}$ sind nicht parallel und somit linear unabhängig voneinander sind. In Formeln heißt das, dass es **keine Werte außer Null** für k und l gibt, sodass $k \cdot \overrightarrow{MC} + l \cdot \overrightarrow{MD} = 0$. Deshalb müssen die Ausdrücke in den Klammern jeweils den Wert Null annehmen, damit die Gleichung eine Lösung besitzt. Daraus ergibt sich ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} - r + \frac{3}{4}s &= 0 \quad (1) \\ r - \frac{5}{4}s &= 0 \quad (2) \qquad \Longrightarrow r = \frac{5}{4}s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} - (\frac{5}{4}s) + \frac{3}{4}s &= 0 \quad (1) \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{2}s &= 0 \qquad \mid\mid \cdot 2 \\ \frac{1}{2} - s &= 0 \qquad \mid +s \\ s &= \frac{1}{2} \\ r &= \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

Die Variable r teilt die Strecke CD in CS und SD auf. Somit ist $\overrightarrow{CS} = \frac{5}{8}\overrightarrow{CD}$ und $\overrightarrow{SD} = \frac{3}{8}\overrightarrow{CD}$. Das Verhältnis beträgt 5 : 3.