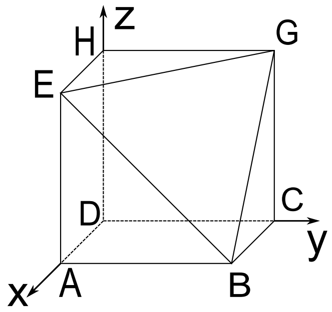
a) ▶ **Bestimme die Koordinaten der Punkte A und H**

Um die Koordinaten zu bestimmen, kannst du die gestrichelten Linien des Körpers als Achsen eines dreidimensionalen Koordinatensystems auffassen. Der Koordinatenursprung liegt dann im Punkt D.
Der Punkt A hat die Koordinaten $A(4 \mid 0 \mid 0)$, da er auf der x-Achse liegt und die Seitenlänge des Körpers 4 Längeneinheiten beträgt.
Der Punkt H liegt auf der z-Achse und hat die Koordinaten $H(0 \mid 0 \mid 4)$.



▶ **Stelle eine Koordinatengleichung der Ebene ε auf**

Die Punkte B, E und G liegen in der Ebene ε. Da du die Koordinaten der drei Punkte B, E und G gegeben hast, kannst du im 1. Schritt zunächst eine Parametergleichung der Ebene aufstellen. Im 2. Schritt musst du die Parameterform in die Koordinatenform umwandeln.
Die allgemeine Koordinatenform der Ebenengleichung lautet: $n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z = d$

1. Schritt: Aufstellen einer Parametergleichung
Wenn du von dem Punkt B ausgeht, erhältst du folgende Parametergleichung:
$\varepsilon: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OB} + s \cdot \overrightarrow{BE} + t \cdot \overrightarrow{BG}$
$\overrightarrow{OB}$ ist dabei der Stützvektor der Ebene, die Vektoren $\overrightarrow{BE}$ und $\overrightarrow{BG}$ sind die Spannvektoren.

$$\varepsilon: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + t \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad s, t \in \mathbb{R}$$

$$\varepsilon: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad s, t \in \mathbb{R}$$

2. Schritt: Umwandlung in die Koordinatengleichung
Du hast zwei Möglichkeiten, um die Ebenengleichung in die Koordinatenform umzuwandeln.

Möglichkeit 1:
Stelle die Koordinatengleichung mit Hilfe des Vektorprodukts der beiden Spannvektoren auf.

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & - & 0 \\ -16 & - & 0 \\ 0 & - & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ -16 \\ -16 \end{pmatrix} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nun setzt du einen Punkt der Ebene für x, y und z ein.

$$\begin{aligned} n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z &= d \\ 1 \cdot 4 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 0 &= d \\ 8 &= d \end{aligned}$$

Eine Koordinatengleichung der Ebene ε lautet:
$\varepsilon: x + y + z = 8$

Möglichkeit 2:
Stelle aus der Parametergleichung ein Gleichungssystem auf und eliminiere die Parameter s und t.

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & x & = & 4 \quad\quad - 4t \\ \text{II} & y & = & 4 - 4s \\ \text{III} & z & = & \quad\quad 4s + 4t \end{array}$$

Löse nun die Gleichungen I und II nach t bzw. s auf. Wenn du sie in Gleichung III einsetzt, erhältst du eine Koordinatengleichung der Ebene ε.

$$\begin{aligned} x &= 4 - 4t && \mid -4 \\ x - 4 &= -4t && \mid :(-4) \\ t &= -\tfrac{1}{4}x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 4 - 4s && \mid -4 \\ y - 4 &= -4s && \mid :(-4) \\ s &= -\tfrac{1}{4}y + 1 \end{aligned}$$

Einsetzen in Gleichung III:

$$\begin{aligned} z &= 4s + 4t \\ z &= 4(-\tfrac{1}{4}y + 1) + 4(-\tfrac{1}{4}x + 1) \\ z &= -y + 4 - x + 4 && \mid +x+y \\ x + y + z &= 8 \end{aligned}$$

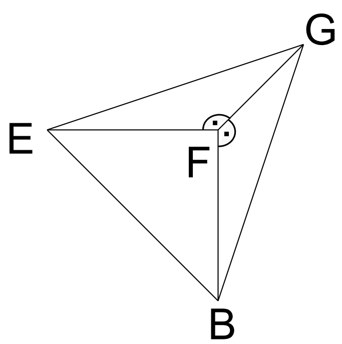
Eine Koordinatengleichung der Ebene ε lautet:
$\varepsilon : x + y + z = 8$

b) ▶ **Berechne das Volumen V_{Pyr} der Pyramide**

Das Volumen einer dreiseitigen Pyramide berechnest du mit folgender Formel:
$V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

Als Grundseite G kannst du das rechtwinklige Dreieck BFG annehmen. Die Höhe h der Pyramide entspricht demnach der Länge der Seite $\overline{EF}$, da diese senkrecht auf dem Dreieck BFG steht.

$$\begin{aligned} V_{Pyr} &= \tfrac{1}{3} \cdot G \cdot h \\ V_{Pyr} &= \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{BF}| \cdot |\overrightarrow{FG}| \cdot |\overrightarrow{EF}| \\ V_{Pyr} &= \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \\ V_{Pyr} &= \tfrac{1}{6} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \\ V_{Pyr} &= \tfrac{64}{6} \\ V_{Pyr} &= \tfrac{32}{3} \end{aligned}$$



▶ **Begründe, welche Kanten nicht in wahrer Länge dargestellt werden**

Der Aufriss des Körpers K liegt in einem Zweitafelbild in der yz-Ebene. Damit die Kanten in wahrer Länge dargestellt werden, müssen sie parallel zu der yz-Ebene verlaufen.
Die Kanten $\overline{EG}$ und $\overline{BG}$ verlaufen nicht parallel zu dieser Ebene. Sie werden demnach nicht in wahrer Länge abgebildet.

c) **► Bestimme die Koordinaten des Punktes *T***

In dem Körper K soll ein Würfel einbeschrieben werden. Dabei sollen drei der Seiten in den Koordinatenebenen liegen und die Ebene ε in einem Punkt berührt werden. Dieser Punkt ist der Punkt T.

Der Punkt T muss von allen drei Seiten den gleichen Abstand haben, damit ein Würfel entsteht. Die Punkte auf der Raumdiagonalen haben von allen drei Seiten den selben Abstand. Das bedeutet, dass der Punkt T auf der Raumdiagonalen liegen muss.

Um die Koordinaten von dem Punkt T zu bestimmen, kannst du wie folgt vorgehen:

1. Stelle die Geradengleichung g der Raumdiagonale auf
2. Setze die Geradengleichung g mit der Koordinatengleichung der Ebene ε gleich

1. Schritt: Aufstellen der Geradengleichung g

Die Raumdiagonale geht durch den Ursprung. Dieser entspricht hier dem Punkt D.

Die Gerade hat den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die Geradengleichung g lautet also wie folgt:

$$g: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OD} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da der Punkt T auf der Geraden g liegt, hat er die Koordinaten $T(t \mid t \mid t)$.

2. Schritt: Gleichsetzen der Geradengleichung g und der Ebenengleichung ε

Der Schnittpunkt der Geradengleichung g und der Ebenengleichung ε entspricht dem Punkt T.

Wenn du die Geradengleichung g in die Koordinatengleichung der Ebene ε einsetzt, erhältst du folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} t + t + t &= 8 \\ 3t &= 8 \qquad \mid :3 \\ t &= \tfrac{8}{3} \end{aligned}$$

Der Punkt T hat die Koordinaten $T(\frac{8}{3} \mid \frac{8}{3} \mid \frac{8}{3})$.