a) **▶ Bestimmen des Definitionsbereichs von f_a und der Gleichungen der Asymptoten von G_a** (7P)

In diesem Aufgabenteil sollst du den Definitionsbereich der Funktionenschar f_a, die Gleichungen aller Asymptoten der zugehörigen Graphen G_a und das Verhalten der Funktionswerte von f_a für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$ bestimmen.
Die Definitionsmenge von f_a umfasst alle Werte, welche für x in den Funktionsterm von f_a eingesetzt werden dürfen. Da f_a eine gebrochenrationale Funktion ist, sind das die x-Werte, für die der Nenner gleich Null wird, denn durch Null darf nicht geteilt werden. Diese Stellen müssen dann aus der Definitionsmenge ausgeschlossen werden.
Außerdem hat f_a an den oben genannten Stellen Polstellen. Du hast somit also auch direkt die Gleichung der Polgeraden bzw. senkrechten Asymptoten von G_a bestimmt.
Um nun noch die restlichen Asymptoten von G_a zu bestimmen, betrachtest du die Funktionsgleichung von f_a und bestimmst zunächst, mit dem CAS, die Grenzwerte aller Summanden getrennt. Verwende dazu die Befehlsfolge:

```
menu → 4:Analysis → 4:Limes
```

Dabei musst du die Fallunterscheidung $a > 0$ und $a < 0$ beachten. Diese Fallunterscheidung muss durch einen senkrechten Strich der Grenzwertbetrachtung im CAS hinzugefügt werden. Durch Addieren erhältst du daraus dann den Grenzwert der gesamten Funktion. Entspricht dieser ebenfalls einer Funktion, so nähert sich G_a für hohe Werte von x dem Graphen dieser Funktion an. Dieser entspricht also der Asymptoten von G_a.

Du gehst also so vor:

1. Schritt: Bestimmen der Nullstellen des Nenners der Funktionsgleichung von f_a
2. Schritt: Bestimmen der restlichen Asymptoten von G_a

1. Schritt: Bestimmen der Nullstellen des Nenners der Funktionsgleichung von f_a

Setze nun den Nenner des Funktionsterms vom f_a mit Null gleich, um so alle x-Werte zu bestimmen, die nicht in den Funktionsterm von f_a eingesetzt werden dürfen, also nicht in $\mathbb{D}_a$ enthalten sind.

$$\begin{aligned} 0 &= ax - 1 && \mid +1 \\ 1 &= ax && \mid :a \\ x &= \frac{1}{a} \end{aligned}$$

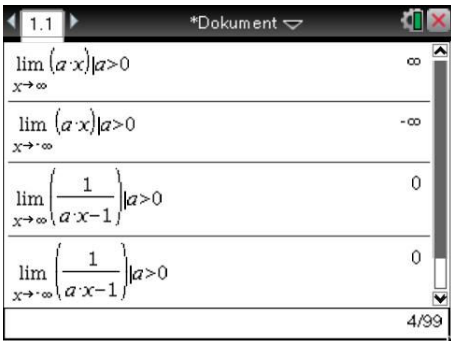
Mit $\mathbb{R}$ als Grundmenge erhältst du dann Folgendes für die Definitionsmenge $\mathbb{D}_a$:

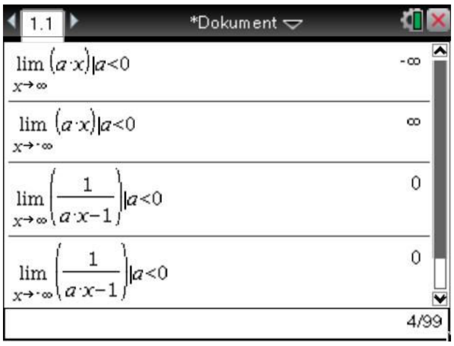
$$\mathbb{D}_a = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{a} \right\}$$

Damit haben die Graphen G_a also Polgeraden bzw. senkrechte Asymptoten mit den Gleichungen $x = \dfrac{1}{a}$

2. Schritt: Bestimmen der restlichen Asymptoten von G_a

Bestimme nun die Grenzwerte aller Summanden des Funktionsterms von f_a mit $a > 0$ und $a < 0$ wie oben gezeigt mit dem CAS-Rechner:





Dieser liefert dir für $a > 0$ die Ergebnisse:

$$\lim_{x\to\infty}(ax) = \infty \qquad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{ax-1}\right) = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty}(ax) = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{ax-1}\right) = 0$$

Und für $a < 0$ die Ergebnisse:

$$\lim_{x\to\infty}(ax) = -\infty \qquad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{ax-1}\right) = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty}(ax) = \infty \qquad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{ax-1}\right) = 0$$

Für $x \to \pm\infty$ geht der Bruch $\frac{1}{ax-1}$ also gegen Null, da der Nenner immer größer wird während der Zähler gleich bleibt. Deshalb liefert die Funktionsgleichung für größere Beträge von x etwa das gleiche Ergebnis wie die Gleichung $y = ax$. Die Graphen G_a nähern sich also der schrägen Asymptote $y = ax$ an.
Durch Addieren erhältst du nun noch die Grenzwerte von f_a für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$.
Für $a > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(f_a) &= \lim_{x\to\infty}(ax) + \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{ax-1}\right) &&= \infty\\ \lim_{x\to-\infty}(f_a) &= \lim_{x\to-\infty}(ax) + \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{ax-1}\right) &&= -\infty\end{aligned}$$

Für $a < 0$ gilt:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(f_a) &= \lim_{x\to\infty}(ax) + \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{ax-1}\right) &&= -\infty\\ \lim_{x\to-\infty}(f_a) &= \lim_{x\to-\infty}(ax) + \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{ax-1}\right) &&= \infty\end{aligned}$$

b) **▶ Bestimmen der Extrempunkte der Graphen G_a** (10P)

In diesem Aufgabenteil sollst du zeigen, dass alle Graphen G_a einen gemeinsamen lokalen Extrempunkt E_1 haben und die Koordinaten dieses Extrempunktes sowie dessen Art ermitteln. Außerdem sollst du zeigen, dass die Graphen von G_a einen weiteren Extrempunkt E_2 besitzen, der von a abhängig ist. Um dies zu zeigen solltest du zunächst einmal alle Extremstellen der Funktionenschar f_a bestimmen.
Für eine Extremstelle bei x_E müssen folgende zwei Bedingungen gelten:

- Notwendige Bedingung: $f_a'(x_E) = 0$
- Hinreichende Bedingung: $f_a''(x_E) \neq 0$

Außerdem gilt weiterhin:

- Aus $f_a''(x_E) > 0$ folgt, dass die Funktion f_a bei x_E ein Minimum hat.
- Aus $f_a''(x_E) < 0$ folgt, dass die Funktion f_a bei x_E ein Maximum hat.

Du musst also zunächst die erste Ableitungsfunktion von f_a mit Null gleichsetzen um so die potentiellen Extremstellen zu bestimmen. Diese setzt du dann in die zweite Ableitungsfunktion von f_a ein und überprüfst, ob sie die hinreichende Bedingung erfüllen und wenn ja, ob es sich um ein Minimum oder ein Maximum handelt. Bei den Stellen, die beide Bedingungen erfüllen, musst du dann noch überprüfen, ob sie für alle $a \neq 0$ gültig sind. Die Stellen die für alle $a \neq 0$ gültig sind setzt du dann in den Funktionsterm von f_a ein und bestimmst so deren y-Koordinate.

Du gehst also so vor:

1. Schritt: Bestimmen der potentiellen Extremstellen von f_a
2. Schritt: Überprüfen der hinreichenden Bedingung für die potentiellen Extremstellen
3. Schritt: Bestimmen der y-Koordinaten

1. Schritt: Bestimmen der potentiellen Extremstellen von f_a

Setze nun mit Hilfe des CAS den Funktionsterm der ersten Ableitung von f_a mit Null gleich.
Definiere dafür zunächst die Funktion f_a im Calculator-Modus als fa und verwende dann noch den `Ableitungs`-Befehl:

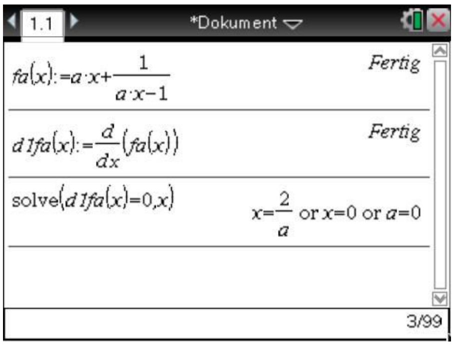
`menu → 4:Analysis → 1:Ableitung`

um die erste Ableitungsfunktion von f_a als $d1fa$ zu definieren.
Verwende dann den `solve`-Befehl:

`menu → 3:Algebra → 1:Löse`

und gib dort folgendes ein:

`solve` $(d1fa(x) = 0, x)$

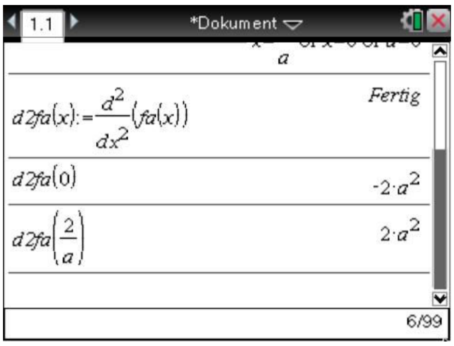


Der CAS-Rechner liefert dir die Ergebnisse: $x_1 = 0$,$x_2 = \frac{2}{a}$ oder $a = 0$. In der Aufgabenstellung ist jedoch $a \neq 0$ gegeben, daher brauchst du das letzte Ergebnis nicht zu berücksichtigen.

2. Schritt: Überprüfen der hinreichenden Bedingung für die potentiellen Extremstellen

Setze nun die beiden potentiellen Extremstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{2}{a}$ in den Funktionsterm von f_a'' ein und überprüfe diese somit auf die hinreichende Bedingung und bestimme gegebenenfalls die Art der jeweiligen Extremstelle. Verwende dafür wieder den `Ableitungs`-Befehl des CAS und definiere so die zweite Ableitungsfunktion von f_a als $d2fa$. Dann gibst du folgendes in den CAS-Rechner ein:

$d2fa(0)$ bzw. $d2fa\left(\dfrac{2}{a}\right)$



Der CAS-Rechner liefert dir folgende Ergebnisse: $f_a''(0) = -2a^2$ und $f_a''(\frac{2}{a}) = 2a^2$.

Mit $a \neq 0$ folgt auf Grund des Quadrats: $f_a''(0) = -2a^2 < 0$ und $f_a''(\frac{2}{a}) = 2a^2 > 0$. Somit ist die hinreichende Bedingung für beide Extremstellen erfüllt und f_a hat ein Maximum bei $x_1 = 0$ und ein Minimum bei $x_2 = \frac{2}{a}$.

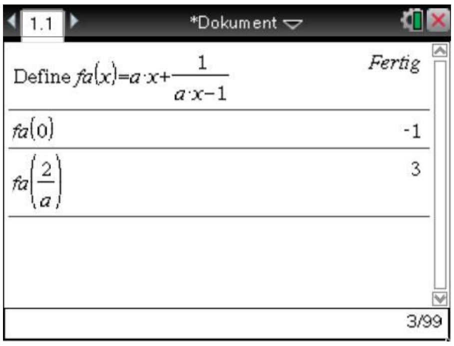
3. Schritt: Bestimmen der y-Koordinaten

Setze nun die beiden Extremstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{2}{a}$ in den Funktionsterm von f_a ein. Gib dazu folgendes in den CAS-Rechner ein:

$f_a(0)$ bzw. $f_a\left(\frac{2}{a}\right)$

Der CAS-Rechner liefert dir die Ergebnisse: $f_a(0) = -1$ und $f_a\left(\frac{2}{a}\right) = 3$.

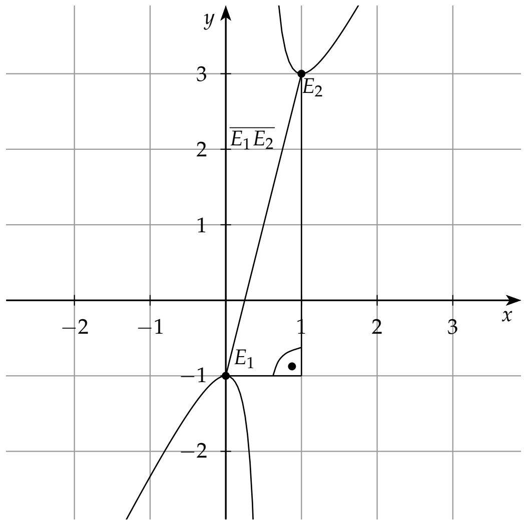
Die Graphen G_a haben also die zwei Extrempunkte $E_1(0\,|\,-1)$ und $E_2(\frac{2}{a}\,|\,3)$.



Da E_1 von a unabhängig ist, hast du gezeigt das alle G_a einen gemeinsamen lokalen Extrempunkt besitzen. Außerdem hast du gezeigt das jeder Graph von G_a einen weiteren Extrempunkt E_2 besitzt, der von a abhängig ist.

▶ Berechnen der Werte von a, für die E_1 und E_2 einen Abstand von $\sqrt{17}$ LE haben

In diesem Aufgabenteil sollst du nun diejenigen Werte von a berechnen, für die die Punkte E_1 und E_2 einen Abstand von $\sqrt{17}$ LE haben. Der Abstand d der beiden Punkte voneinander ist über die Hypothenuse des, in der Zeichnung erkennbaren, Dreiecks definiert. Die Längen der beiden Katheten sind dabei einmal durch die Differenz der x-Koordinaten und einmal durch die Differenz der y-Koordinaten gegeben. Mit dem Satz des Pythagoras kannst du dann folgende Gleichung für den Abstand d von E_1 und E_2 aufstellen:

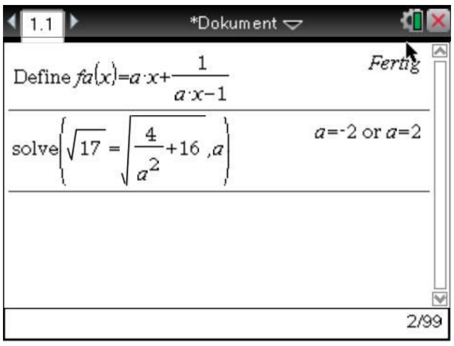


$$\begin{aligned} d &= \sqrt{\left(x_{E_2} - x_{E_1}\right)^2 + \left(y_{E_2} - y_{E_1}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\tfrac{2}{a} - 0\right)^2 + (3 - (-1))^2} = \sqrt{\tfrac{4}{a^2} + 16} \end{aligned}$$

Setze nun $d = \sqrt{17}$ in diese Gleichung ein und löse nach a auf. Verwende dafür den `solve`-Befehl des CAS.

Der CAS-Rechner liefert dir die Ergebnisse: $a_1 = 2$ und $a_2 = -2$.

Für die Werte $a_{1,2} = \pm 2$ haben die Punkte E_1 und E_2 also einen Abstand von $d = \sqrt{17}$.



c) **▶ Bestimmen der Gleichung von g** (8P)

Hier ist es nun deine Aufgabe die Gleichung der Ursprungsgerade g so zu bestimmen, dass sich die Tangente t an den Graphen G_2 im Punkt E_2 und g im Winkel von 45° schneiden. Für die Funktionsgleichung der Ursprungsgeraden g kannst du zunächst allgemein schreiben:

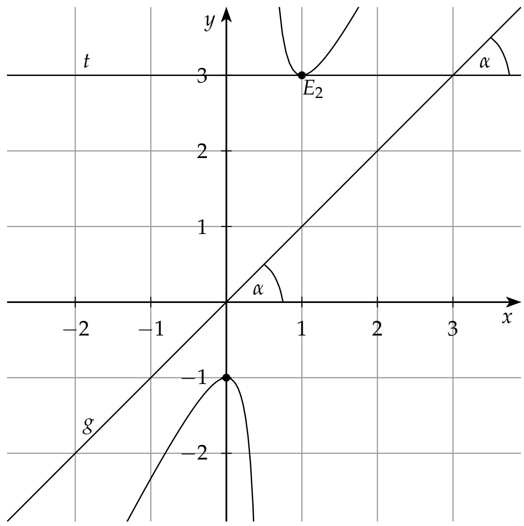
$g(x) = m \cdot x$

m entspricht dabei der Steigung der Geraden g.

Da die Steigung von G_2 in seinem Tiefpunkt E_2 gleich Null sein muss (siehe notwendige Bedingung), hat auch die Tangente t die Steigung Null und verläuft parallel zur x-Achse. Es gilt: $t(x) = 3$. Wie in der Zeichnung erkennbar, entspricht daher der Schnittwinkel auch dem Steigungswinkel der Ursprungsgeraden g. Benennt man nun den Schnittwinkel zwischen g und t mit α, dann entspricht der Tangens von α der Steigung von g. Es gilt also:

$\tan(\alpha) = m.$

Um also die Steigung m von g zu bestimmen, musst du $\tan(45°)$ mit dem CAS berechnen.



Bestimme nun m, indem du $\tan(\alpha = 45°)$ berechnest und setze m dann in die Funktionsgleichung von g ein.

$m = \tan(\alpha = 45°) = 1$

Die Funktionsgleichung der Ursprungsgerade g lautet also wie folgt:

$g(x) = x.$

▶ Bestimmen aller Werte für a

In diesem Aufgabenteil sollst du nun alle Wert für a, mit $a \neq 1$ bestimmen, für die die zugehörige Tangente an G_a im Punkt $P(1 \mid f_a(1))$ orthogonal zur Geraden $y = ax$ verläuft.
Damit zwei Geraden senkrecht zu einander verlaufen, muss für deren Steigungen m_1 und m_2 folgendes gelten:

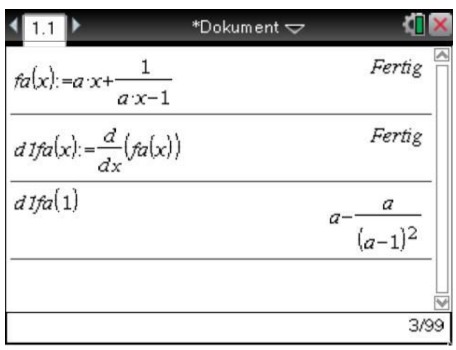
$m_1 \cdot m_2 = -1$

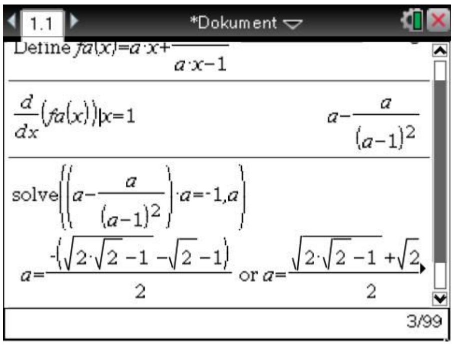
Die Steigung m_1 der Tangenten ist definiert durch den Funktionswert der Ableitung von f_a an der Stelle $x = 1$. Es gilt also: $m_1 = f_a'(1)$. Die Steigung m_2 der Geraden $y = ax$ ist a. Es gilt also: $m_2 = a$. Du musst also zunächst, mit Hilfe des CAS-Rechners, $f_a'(1)$ bestimmen. Dann setzt du m_1 und m_2 in die oben genannte Gleichung ein und löst diese nach a auf.

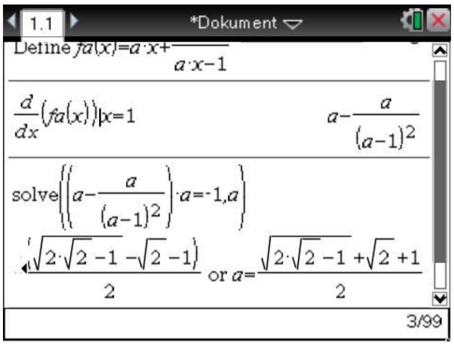
Bestimme nun $f_a'(1)$. Die Funktion f_a' hast du im vorherigen Aufgabenteil bereits als $d1fa$ definiert, lasse den CAS-Rechner daher nun $d1fa(1)$ bestimmen.
Der CAS-Rechner liefert dir das Ergebnis:

$m_1 = f_a'(1) = a - \dfrac{a}{(a-1)^2}.$

Setze nun $m_1 = a - \frac{a}{(a-1)^2}$ und $m_2 = a$ in die obige Gleichung ein und löse diese mit dem `solve`-Befehl nach a auf.







Der CAS-Rechner liefert dir die Ergebnisse:

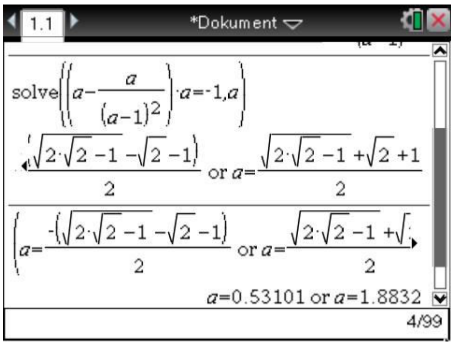
$$a_1 = \frac{-\left(\sqrt{2\cdot\sqrt{2}-1}-\sqrt{2}-1\right)}{2} \text{ und}$$

$$a_2 = \frac{\sqrt{2\cdot\sqrt{2}-1}+\sqrt{2}+1}{2}.$$

Verwende nun noch die Befehlsfolge:

```
menu → 2:Zahl → 1:In Dezimalzahl konvertieren
```

um dir die Ergebnisse als Dezimalzahl anzeigen zu lassen. Damit erhältst du $a_1 \approx 0{,}5$ und $a_2 \approx 1{,}9$.



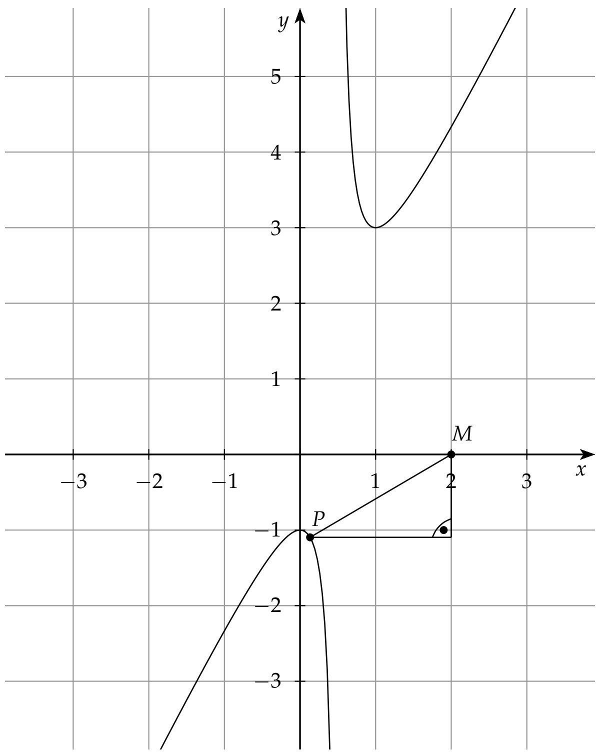
Für die Werte $a_1 \approx 0{,}5$ und $a_2 \approx 1{,}9$ verläuft also die Tangente an G_a im Punkt $P(1\,|\,fa(1))$ orthogonal zur Geraden $y = ax$.

d) ▶ **Bestimmen des Punktes P von G_2 mit dem geringsten Abstand d zu M** (7P)

In diesem Aufgabenteil sollst du nun den Punkt P des Graphen von G_2, der den geringsten Abstand zum Punkt $M(2\,|\,0)$ hat, bestimmen und diesen Abstand d berechnen.

Da hier vom geringsten Abstand die Rede ist, handelt es sich um ein Extremwertproblem. Du musst also eine Funktion s aufstellen, die den Abstand d zwischen den Punkten P und M in Abhängigkeit von x beschreibt. Gesucht ist dann das absolute Minimum dieser Funktion.

Dazu gehst du genauso vor wie im Aufgabenteil b). Der Abstand d der Punkte P und M voneinander ist über die Hypothenuse des, in der Zeichnung erkennbaren, Dreiecks definiert. Die Längen der beiden Katheten sind dabei einmal durch die Differenz der x-Koordinaten und einmal durch die Differenz der y-Koordinaten gegeben. Allgemein gilt für die Koordinaten des Punktes $P(x\,|\,f_2(x))$. Mit dem Satz des Pythagoras kannst du dann folgende Gleichung für den Abstand d von P und M aufstellen:



$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x-2)^2 + (f_2(x) - 0)^2} \\ &= \sqrt{(x-2)^2 + (f_2(x))^2} = s(x) \end{aligned}$$

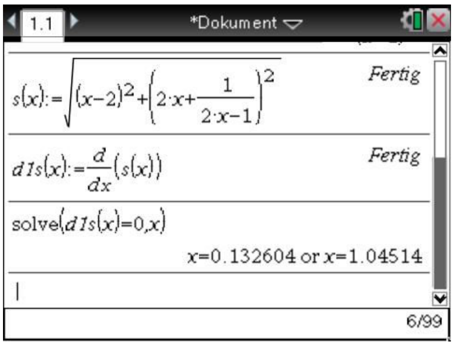
Ebenfalls analog zum Aufgabenteil b) musst du nun, mit Hilfe der notwendigen und der hinreichenden Bedingung, die Minima dieser Funktion s bestimmen. Diese setzt du dann wieder in s ein und bestimmst so das absolute Minimum von s. Dies entspricht dem gesuchten Abstand d der Punkte p und M. Zuletzt musst du dann noch das absolute Minimum von s in f_2 einsetzen, um so die y-Koordinate des Punktes P zu bestimmen.

Du gehst also so vor:

1. Schritt: Bestimmen der potentiellen Extremstellen von s
2. Schritt: Bestimmen der Minima von s
3. Schritt: Bestimmen des absoluten Minimums von s und des Abstandes d
4. Schritt: Bestimmen der y-Koordinate des Punktes P

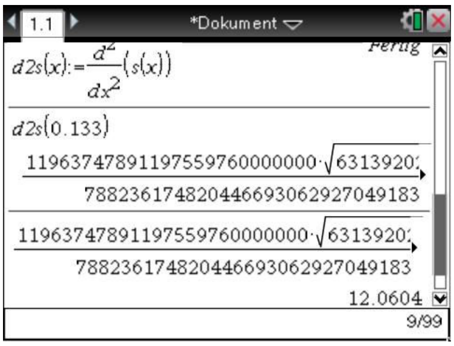
1. Schritt: Bestimmen der potentiellen Extremstellen von s

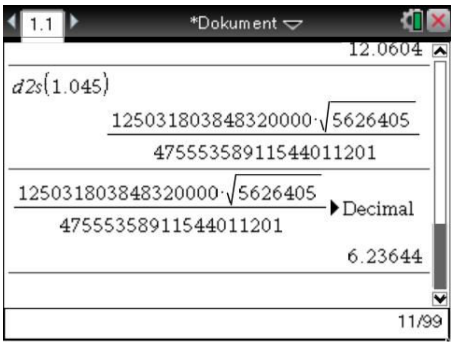
Bestimme nun die potentiellen Extremstellen von s. Definiere dazu die Funktion s und ihre Ableitungsfunktion s' im Calculator-Modus des CAS. Verwende dann den `solve`-Befehl um den Funktionsterm der Ableitung von s mit Null gleichzusetzen.
Der CAS-Rechner liefert dir die Ergebnisse: $x_1 \approx 0,133$ und $x_2 \approx 1,045$.



2. Schritt: Bestimmen der Minima von s

Setze nun $x_1 = 0,133$ und $x_2 = 1,045$ in die zweite Ableitung von s ein. Definiere dafür die zweite Ableitungsfunktion von s als $d2s$.



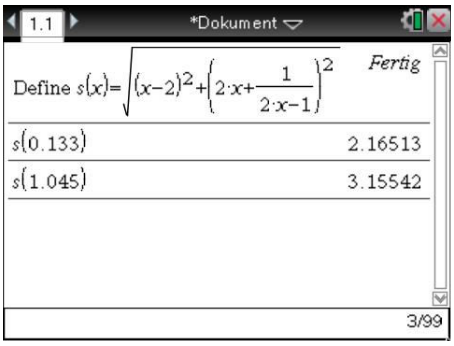


Der CAS-Rechner liefert dir die Ergebnisse $s''(0,133) \approx 12,1$ und $s''(1,045) \approx 6,2$

Es gilt also $s''(0,133) > 0$ und $s''(1,045) > 0$. Somit ist die hinreichende Bedingung für beide Stellen erfüllt und die Funktion s hat bei $x_1 \approx 0,133$ und $x_2 \approx 1,045$ jeweils ein Minimum.

3. Schritt: Bestimmen des absoluten Minimums von s und des Abstandes d

Setze nun $x_1 = 0{,}133$ und $x_2 = 1{,}045$ in die Funktionsgleichung von s ein.

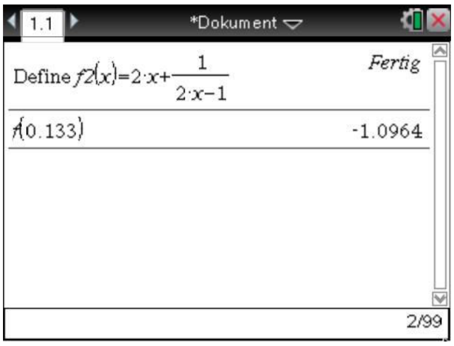


Der CAS-Rechner liefert dir die Ergebnisse: $s(0{,}133) \approx 2{,}2$ und $s(1{,}045) \approx 3{,}2$.

Es gilt also $s(0{,}133) < f_2(1{,}045)$. Somit ist $x_1 = 0{,}133$ des globale Minimum der Funktion s. Außerdem gilt für den Abstand d zwischen den Punkten P und M: $d \approx 2{,}2$.

4. Schritt: Bestimmen der y-Koordinate des Punktes P

Setze nun $x_1 = 0{,}133$ in die Funktionsgleichung von f_2 ein und bestimme so die y-Koordinate des Punktes P.

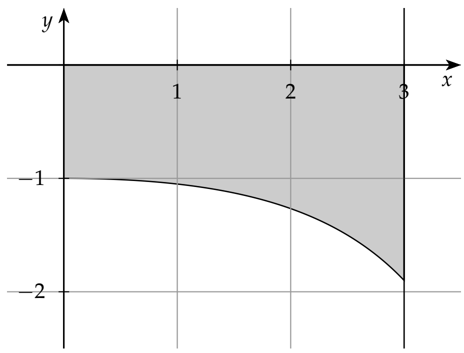


Der CAS-Rechner liefert dir das Ergebnis: $f_2(0{,}133) \approx -1{,}1$.

Die Koordinaten des Punktes P, der den geringsten Abstand zum Punkt M hat, lautet also etwa: $P(0{,}133 \mid -1{,}1)$

e) ▶ **Berechnen des umbauten Raumes für das Kassenhäuschen** (3P)

Der Graph $G_{\frac{1}{5}}$ schließt mit der Geraden $x = 3$ und den beiden Koordinatenachsen eine Fläche ein. Durch Rotation dieser Fläche um die x-Achse entsteht ein Körper, der modellhaft der Form eines Kassenhäuschens mit kreisförmiger Grund- und Deckfläche entspricht. Deine Aufgabe ist es nun, das Volumen V des umbauten Raumes zu berechnen. Dabei entspricht eine Längeneinheit einem Meter.



Für das Volumen V eines Körpers, der entsteht wenn die Funktion $f_{\frac{1}{5}}$ um die x-Achse rotiert, gilt:

$$V = \pi \cdot \int_a^b \left(f_{\frac{1}{5}}(x)\right)^2 \mathrm{d}x$$

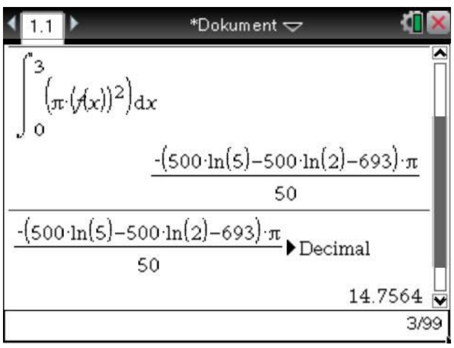
Dabei entspricht a der x-Koordinate der Deckfläche, also $a = 0$ und b der x-Koordinate der Grundfläche, also $b = 3$. Du musst nun zunächst $a = \frac{1}{5}$ in den Funktionsterm von f_a einsetzen. Diese Funktion definierst du dann als f in deinem CAS.

Dann verwendest du den `Integral`-Befehl der wie folgt aussieht:

`menu → 4:Analysis → 3:Integral`

Damit gibst du folgendes in den CAS-Rechner ein:

$$\int_0^3 \pi \cdot (f(x))^2 \,\mathrm{d}x$$



Der CAS-Rechner liefert dir das Ergebnis: $V \approx 14{,}8\,\text{VE}$.

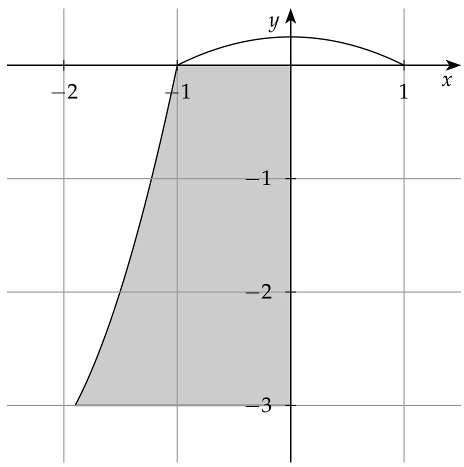
Der umbaute Raum hat also ein Volumen von ungefähr $14{,}8\,\text{m}^3$

f) ▶ **Ermitteln der Gleichung eines Graphen, zur Beschreibung des Dachquerschnittes** (5P)

In diesem Aufgabenteil sollst du nun die Gleichung eines Graphen, der die obere Begrenzung des Dachquerschnittes beschreibt, ermitteln.

Das Dach soll dabei für ein Kassenhäuschen gebaut werden, dessen Form man erhält, indem man den in Aufgabe d) beschriebene Körper um 90° im Uhrzeigersinn dreht. Die nebenstehende Skizze veranschaulicht die gedrehte Querschnittsfläche und die Parabel p für den Dachquerschnitt. Für die Funktionsgleichung von p, auf Grund der (in der Skizze erkennbaren) Achsensymmetrie, gilt allgemein:

$p(x) = ax^2 + b$



An Hand dieser Skizze kannst du erkennen, dass der Punkt P auf dem Graphen der Parabel liegt. Seine Koordinaten $P(-1\,|\,0)$ müssen also die gesuchte Funktionsgleichung der Parabel p lösen.

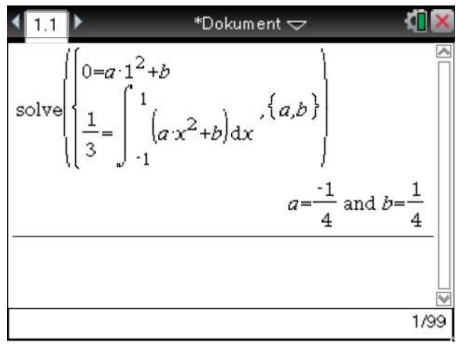
Außerdem soll der Flächeninhalt des Dachquerschnittes, welcher dem Integral über p von -1 bis 1 entspricht, $\frac{1}{3}$ Flächeneinheiten groß sein. Damit erhältst du folgendes Gleichungssystem:

I $\quad 0 = a \cdot 1^2 + b$

II $\quad \frac{1}{3} = \int_{-1}^{1} (ax^2 + b)\mathrm{d}x$

Löse nun dieses Gleichungssystem mit dem CAS. Verwende dafür den Befehl:

`menu → 3:Algebra → 7:Gleichungssytem lösen`



Der CAS-Rechner liefert dir die Ergebnisse:

$b = \frac{1}{4}$ und $a = -\frac{1}{4}$

Nun setzt du noch $a = -\frac{1}{4}$ und $b = \frac{1}{4}$ in den allgemeinen Funktionsterm von p ein und erhältst damit die gesuchte Gleichung des Graphen, der die obere Begrenzung des Dachquerschnittes beschreibt.

$p(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$