

a) ► Geradengleichungen u_1 und u_2 angeben

(8P)

Aus der Aufgabenstellung ist bekannt:

- U-Boot U_1 passiert die Punkte $P_0(4 | 14 | -4)$ und $P_1(6 | 11 | -4)$.
- U-Boot U_2 passiert die Punkte $Q_0(11 | 9 | -14)$ und $Q_1(9 | 6 | -12)$.

Eine Gerade g hat allgemein die Gleichung

$$g: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{q},$$

wobei \vec{p} der Stützvektor und \vec{q} der Richtungsvektor ist. Wähle z.B. für die beiden Geraden $\overrightarrow{OP_0}$ bzw. $\overrightarrow{OQ_0}$ als **Stützvektoren** und die Vektoren $\overrightarrow{P_0P_1}$ bzw. $\overrightarrow{Q_0Q_1}$ als **Richtungsvektoren**.**1. Schritt: Geradengleichung für u_1** Der Stützvektor $\overrightarrow{OP_0}$ hat die Koordinaten $\overrightarrow{OP_0} = \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ -4 \end{pmatrix}$.Für den Richtungsvektor $\overrightarrow{P_0P_1}$ gilt:

$$\overrightarrow{P_0P_1} = \overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0} = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-4 \\ 11-14 \\ -4-(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es folgt die Gleichung der Geraden u_1 mit

$$u_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}.$$

2. Schritt: Geradengleichung für u_2 Der Stützvektor $\overrightarrow{OQ_0}$ hat die Koordinaten $\overrightarrow{OQ_0} = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ -14 \end{pmatrix}$.Für den Richtungsvektor $\overrightarrow{Q_0Q_1}$ gilt:

$$\overrightarrow{Q_0Q_1} = \overrightarrow{OQ_1} - \overrightarrow{OQ_0} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-11 \\ 6-9 \\ -12-(-14) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Es folgt die Gleichung der Geraden u_2 mit

$$u_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ -14 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}.$$

► **Geschwindigkeiten der U-Boote nachweisen**Überlege, was „Geschwindigkeit“ bedeutet: Sie gibt dir an, welche **Strecke** in welcher **Zeit** zurückgelegt wird. Aus der Aufgabenstellung weißt du:

- U-Boot U_1 legt die Strecke von P_0 zu P_1 in 1 Minute zurück.
- U-Boot U_2 legt die Strecke von Q_0 zu Q_1 in 1 Minute zurück.

Du kannst also so vorgehen:

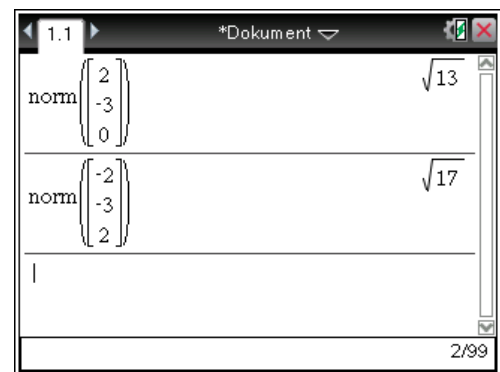
- Berechne zunächst die Länge der Strecken $\overline{P_0P_1}$ und $\overline{Q_0Q_1}$.
- Eine Einheit im Koordinatensystem entsprechen 100 m. Multipliziere die Ergebnisse also mit 100, um die Länge in Meter zu erhalten.
- Diese Strecken legen die beiden U-Boote jeweils in 1 Minute zurück. Formuliere die Geschwindigkeit in Meter pro Minute.

1. Schritt: Streckenlängen berechnen

Die Länge einer Strecke entspricht dem Betrag des zugehörigen Vektors. Die Vektoren $\overrightarrow{P_0P_1}$ und $\overrightarrow{Q_0Q_1}$ hast du bereits berechnet.

$$\begin{aligned} \overline{P_0P_1} &= \left| \overrightarrow{P_0P_1} \right| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \\ &= \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{4 + 9} \\ &= \sqrt{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{Q_0Q_1} &= \left| \overrightarrow{Q_0Q_1} \right| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right| \\ &= \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 9 + 4} \\ &= \sqrt{17} \end{aligned}$$



2. Schritt: Geschwindigkeit berechnen

1 LE im Koordinatensystem entspricht 100 m in der Wirklichkeit. Die U-Boote haben tatsächlich jeweils die 100-fache Strecke zurückgelegt und haben dafür je eine Minute gebraucht

U-Boot U_1 legt in einer Minute eine Strecke von $100 \cdot \sqrt{13} \text{ m} \approx 361 \text{ m}$ zurück.

U-Boot U_2 legt in einer Minute eine Strecke von $100 \cdot \sqrt{17} \text{ m} \approx 412 \text{ m}$ zurück.

Damit kannst du sagen:

U-Boot U_1 fährt mit einer Geschwindigkeit von $100 \cdot \sqrt{13} \frac{\text{m}}{\text{min}} \approx 361 \frac{\text{m}}{\text{min}}$.

U-Boot U_2 fährt mit einer Geschwindigkeit von $100 \cdot \sqrt{17} \frac{\text{m}}{\text{min}} \approx 412 \frac{\text{m}}{\text{min}}$.

► Begründen, dass u_1 und u_2 nicht parallel sind

Zwei Geraden sind parallel, wenn ihre Richtungsvektoren parallel verlaufen. Dies wiederum ist der Fall, wenn die Richtungsvektoren **Vielfache** voneinander sind.

Formal kannst du das so formulieren: Geraden u_1 und u_2 sind parallel, wenn für die Richtungsvektoren $\overrightarrow{P_0P_1}$ und $\overrightarrow{Q_0Q_1}$ gilt:

$$\overrightarrow{P_0P_1} = k \cdot \overrightarrow{Q_0Q_1}.$$

Prüfe nach, ob diese Gleichung erfüllt ist.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_0P_1} &= k \cdot \overrightarrow{Q_0Q_1} \\ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} &= k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2k \\ -3k \\ 2k \end{pmatrix} & \Rightarrow k = -1 \\ & \Rightarrow k = 1 \\ & \Rightarrow k = 0\end{aligned}$$

Es ergibt sich kein einheitlicher Wert für k . Deshalb sind die Richtungsvektoren keine Vielfachen voneinander und die Geraden u_1 und u_2 sind nicht parallel.

► Kleinsten Abstand der U-Boote untersuchen

Hier ist wichtig, dass du die Aufgabenstellung genau liest: Es ist nicht nach dem kleinsten Abstand der **Geraden** u_1 und u_2 gefragt, sondern nach dem kleinsten Abstand der **U-Boote**.

Zu Beginn, um 12:21 Uhr, befindet sich U_1 in Punkt P_0 und U_2 in Punkt Q_0 . Du weißt, dass sie sich geradlinig entlang des Richtungsvektors bewegen und die Strecke, die durch den Richtungsvektor beschrieben wird, in einer Minute zurücklegen.

Das heißt: Wenn du $r = 1$ in die Geradengleichungen einsetzt, so erhältst du die Position der U-Boote nach einer Minute; für $r = 2$ die Position nach zwei Minuten; für $r = 3$ die Position nach drei Minuten etc.

Die Geradengleichungen geben dir also an, in welcher Position sich U_1 bzw. U_2 nach r Minuten befinden.

Du kannst so vorgehen:

- Fasse die Geradengleichung jeweils in einem **Vektor** $\overrightarrow{OB_1}$ bzw. $\overrightarrow{OB_2}$ zusammen. Er beschreibt die Position, an der sich das jeweilige U-Boot nach r Minuten befindet.
- Gesucht ist der **kleinste Abstand** der beiden U-Boote. Berechne also den Abstand $\overline{B_1B_2}$. Er gibt dir an, wie weit die beiden U-Boote nach r Minuten voneinander entfernt sind.
- Untersuche, welchen kleinsten Wert dieser Abstand annehmen kann.

1. Schritt: Position der U-Boote als Vektor formulieren

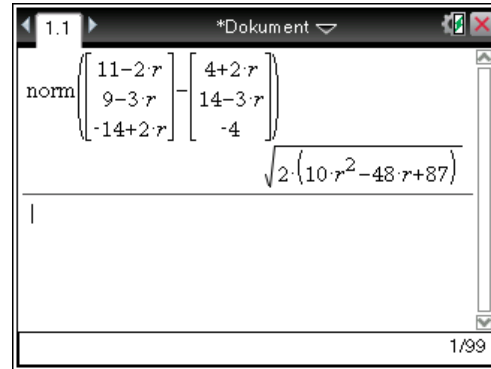
U-Boot U_1 befindet sich nach r Minuten im Punkt B_1 mit dem Ortsvektor $\overrightarrow{OB_1} = \begin{pmatrix} 4 + 2r \\ 14 - 3r \\ -4 \end{pmatrix}$.

U-Boot U_2 befindet sich nach r Minuten im Punkt B_2 mit dem Ortsvektor $\overrightarrow{OB_2} = \begin{pmatrix} 11 - 2r \\ 9 - 3r \\ -14 + 2r \end{pmatrix}$.

2. Schritt: Abstand der U-Boote berechnen

Die U-Boote befinden sich nach r Minuten in den Punkten B_1 und B_2 . Der Abstand der beiden U-Boote ist dann der Abstand der beiden Punkte und somit auch die Länge der Strecke $\overline{B_1B_2}$:

$$\begin{aligned}
 \overline{B_1 B_2} &= \left| \overrightarrow{B_1 B_2} \right| = \left| \overrightarrow{OB_2} - \overrightarrow{OB_1} \right| \\
 &= \left| \begin{pmatrix} 11 - 2r \\ 9 - 3r \\ -14 + 2r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 + 2r \\ 14 - 3r \\ -4 \end{pmatrix} \right| \\
 &= \left| \begin{pmatrix} 11 - 2r - (4 + 2r) \\ 9 - 3r - (14 - 3r) \\ -14 + 2r - (-4) \end{pmatrix} \right| \\
 &= \left| \begin{pmatrix} 11 - 2r - 4 - 2r \\ 9 - 3r - 14 + 3r \\ -14 + 2r + 4 \end{pmatrix} \right| \\
 &= \left| \begin{pmatrix} 7 - 4r \\ -5 \\ -10 + 2r \end{pmatrix} \right| \\
 &= \sqrt{(7 - 4r)^2 + (-5)^2 + (-10 + 2r)^2} \\
 &= \sqrt{49 - 2 \cdot 7 \cdot 4r + (4r)^2 + 25 + 100 - 2 \cdot 10 \cdot 2r + (2r)^2} \\
 &= \sqrt{49 - 56r + 16r^2 + 25 + 100 - 40r + 4r^2} \\
 &= \sqrt{174 - 96r + 20r^2}
 \end{aligned}$$



Für den Abstand der beiden U-Boote nach r Minuten ergibt sich der Term $\sqrt{20r^2 - 96r + 174}$.

3. Schritt: Minimalen Abstand berechnen

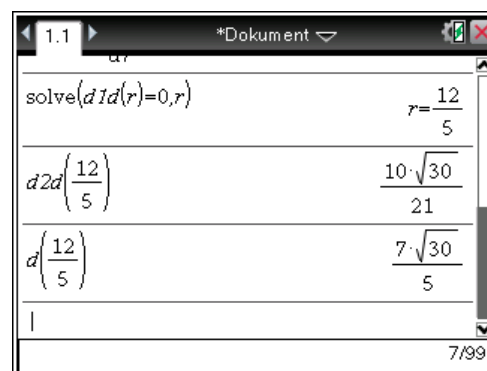
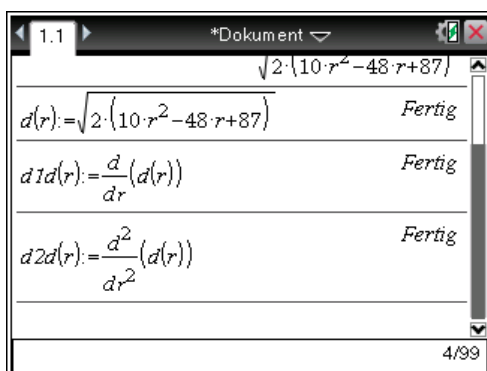
Wir wollen den Abstand d der beiden U-Boote als Funktion d mit $d(r) = \sqrt{20r^2 - 96r + 174}$ auffassen. Gesucht ist der minimale Abstand, also der kleinste Funktionswert von d . Berechne deshalb das **Minimum** r_M von d .

Für dieses Minimum gilt

- das **notwendige Kriterium** $d'(r_M) = 0$,
- das **hinreichende Kriterium** $d''(r_M) > 0$.

Definiere zunächst die Funktion d sowie die ersten beiden Ableitungen d' und d'' . Wir speichern sie unter $d1d(r)$ und $d2d(r)$. Den Befehl für „Ableiten“ findest du dabei unter **menu** → 4 → 1. Löse dann die Gleichung $d'(r) = 0$ mit dem **solve**-Befehl und erhalte so die potentiellen Extremstellen von d . Ermittle zuletzt mithilfe der zweiten Ableitung, an welcher Stelle das Minimum von d vorliegt.

Zuletzt kannst du mit $d(r_M)$ den zugehörigen minimalen Abstand berechnen.



Das CAS liefert die potentielle Extremstelle $r_M = \frac{12}{5} = 2,4$. Wegen $d''(\frac{12}{5}) = \frac{10 \cdot \sqrt{30}}{21} > 0$, liegt an dieser Stelle tatsächlich ein Minimum vor.

Für den Abstand selbst ergibt sich: $d(\frac{12}{5}) = \frac{7 \cdot \sqrt{30}}{5} \approx 7,67$.

Eine LE im Koordinatensystem entspricht 100 m in der Realität. Also können sich die beiden U-Boote **höchstens** auf 767 m nahe kommen. Damit folgt:

Die beiden U-Boote können sich auf ihren Kursen maximal 767 m nahe kommen. Sie kommen sich also nicht näher als 500 m.

b) ► **Entfernung von U_2 und Kreuzfahrtschiff untersuchen** (11P)

Laut Aufgabenstellung liegt die Meeresoberfläche in der x - y -Ebene. Der Punkt, in dem das U-Boot U_2 die Meeresoberfläche erreicht, ist also der Punkt, in dem die Gerade u_2 die x - y -Ebene durchstößt.

Alle Punkte in der x - y -Ebene haben die z -Koordinate $z = 0$. Berechne also den Punkt auf der Geraden u_2 , für den gilt: $z = 0$.

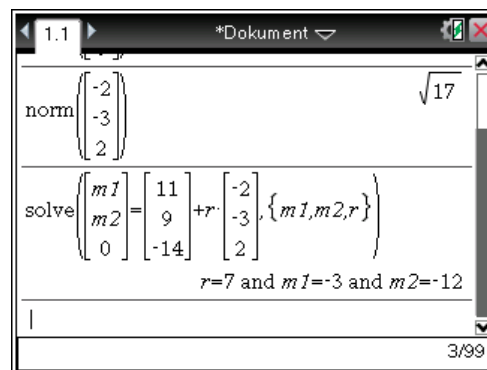
Du kannst so vorgehen:

- Der Punkt, in dem das U-Boot U_2 an die Meeresoberfläche kommt, sei der Punkt M . Er hat allgemein die Koordinaten $M(m_1 | m_2 | 0)$. Setze diese Koordinaten in die Geradengleichung von u_2 ein und löse nach r auf.
- Bestimme dann die vollständigen Koordinaten von M .
- Berechne zuletzt den Abstand der Punkte M und K .

1. Schritt: Punkt M berechnen

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ -14 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Du kannst diese Gleichung mit dem solve-Befehl deines CAS nach t , m_1 und m_2 auflösen.



Mit dem CAS ergibt sich $r = 7$, $m_1 = -3$ und $m_2 = -12$.

Damit folgt:

Das U-Boot U_2 erreicht die Meeresoberfläche im Punkt $M(-3 | -12 | 0)$.

2. Schritt: Abstand von M und K berechnen

Gesucht ist der Abstand des U-Bootes U_2 an der Meeresoberfläche und dem Kreuzfahrtschiff, das in Punkt $K(45 | 2 | 0)$ ankert. Berechne also die Länge der Strecke \overline{MK} .

$$\begin{aligned} \overline{MK} &= |\overrightarrow{MK}| = |\overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OM}| \\ &= \left| \begin{pmatrix} 45 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left| \begin{pmatrix} 45 - (-3) \\ 2 - (-12) \\ 0 - 0 \end{pmatrix} \right| \\
 &= \left| \begin{pmatrix} 48 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \\
 &= \sqrt{48^2 + 14^2} \\
 &= \sqrt{2.500} = 50
 \end{aligned}$$

Eine LE im Koordinatensystem entspricht 100 m in der Wirklichkeit. Also sind das U-Boot U_2 und das Kreuzfahrtschiff insgesamt $50 \text{ m} \cdot 100 = 5.000 \text{ m} = 5 \text{ km}$ voneinander entfernt, wenn das U-Boot U_2 die Meeresoberfläche erreicht.

c) ► **Abstand von allgemeinem Punkt X und F angeben**

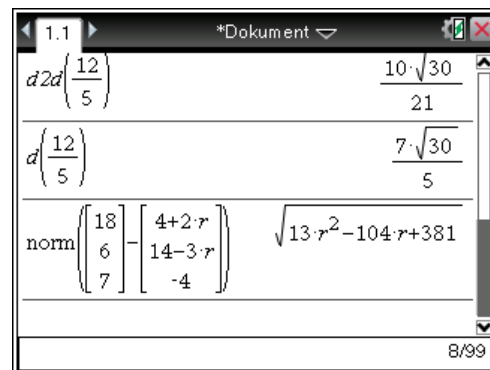
(7P)

Der Punkt X soll ein allgemeiner Punkt auf der Geraden u_1 sein. Seine Koordinaten folgen aus der Geradengleichung der Gerade u_1 :

$$X(4 + 2r \mid 14 - 3r \mid -4).$$

Gesucht ist der Abstand der Punkte X und F . Berechne also die Länge der Strecke \overline{XF} .

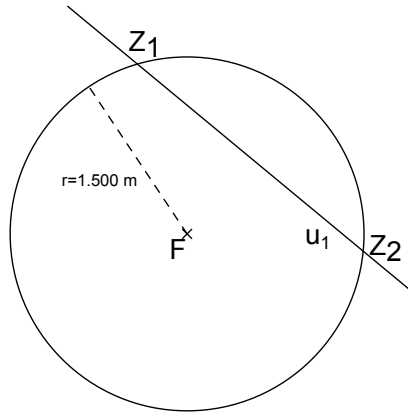
$$\begin{aligned}
 \overline{XF} &= \left| \overrightarrow{XF} \right| = \left| \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OX} \right| \\
 &= \left| \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 + 2r \\ 14 - 3r \\ -4 \end{pmatrix} \right| \\
 &= \left| \begin{pmatrix} 18 - (4 + 2r) \\ 6 - (14 - 3r) \\ 7 - (-4) \end{pmatrix} \right| \\
 &= \left| \begin{pmatrix} 18 - 4 - 2r \\ 6 - 14 + 3r \\ 7 + 4 \end{pmatrix} \right| \\
 &= \left| \begin{pmatrix} 14 - 2r \\ -8 + 3r \\ 11 \end{pmatrix} \right| \\
 &= \sqrt{(14 - 2r)^2 + (-8 + 3r)^2 + (11)^2} \\
 &= \sqrt{14^2 - 2 \cdot 14 \cdot 2r + (2r)^2 + (-8)^2 - 2 \cdot 8 \cdot 3r + (3r)^2 + 121} \\
 &= \sqrt{196 - 56r + 4r^2 + 64 - 48r + 9r^2 + 121} \\
 &= \sqrt{381 - 104r + 13r^2} \\
 &= \sqrt{13r^2 - 104r + 381}
 \end{aligned}$$



Der Abstand eines allgemeinen Punktes X auf der Geraden u_1 vom Punkt F beträgt $\sqrt{13r^2 - 104r + 381}$.

► **Punkte bestimmen, wo Übertragung noch möglich ist**

Eine Skizze der Situation kann dir bei der Lösung dieser Aufgabe helfen:



Der Bereich, in dem sich das U-Boot U_1 befinden muss, um noch eine Nachricht an die Station senden zu können, kann als **Kreis** mit einem Radius von 1.500 m dargestellt werden. Die beiden Punkte, an denen eine Übertragung gerade noch möglich ist, sind die beiden Schnittpunkte von Kreis und Gerade. Wir haben sie in nebenstehender Abbildung mit Z_1 und Z_2 bezeichnet.

Diese beiden Punkte liegen auf der Geraden u_1 und haben vom Punkt F einen Abstand von 1.500 m. Da eine LE im Koordinatensystem 100 m in der Wirklichkeit entspricht, sind diese beiden Punkte vom Punkt F 15 LE entfernt.

Den Abstand, den ein beliebiger Punkt X auf der Geraden u_1 vom Punkt F hat, hast du soeben bestimmt. Dieser Abstand soll nun 15 LE betragen. Du kannst so vorgehen:

- Setze den Term für den allgemeinen Abstand gleich 15.
- Löse diese Gleichung mit dem solve-Befehl nach r . Du erhältst zwei Lösungen r_1 und r_2 .
- Setze r_1 und r_2 anschließend in die Geradengleichung von u_1 ein, um die Koordinaten der beiden Punkte Z_1 und Z_2 zu erhalten.

1. Schritt: Parameterwerte für r ermitteln

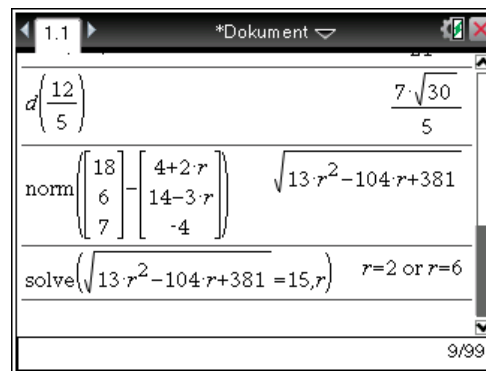
Löse die Gleichung

$$\sqrt{13r^2 - 104r + 381} = 15$$

mit dem solve-Befehl.

Das CAS liefert die beiden Lösungen

$$r_1 = 2 \text{ und } r_2 = 6.$$



2. Schritt: Koordinaten der Punkte bestimmen

Setze $r_1 = 6$ und $r_2 = 2$ in die Geradengleichung von u_1 ein und erhalte so die Koordinaten der beiden Punkte Z_1 und Z_2 .

$$\begin{aligned} \vec{OZ}_1 &= \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ -4 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 + 12 \\ 14 - 18 \\ -4 + 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 16 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{OZ}_2 &= \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ -4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4+4 \\ 14-6 \\ -4+0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Die beiden Punkte, in denen eine Übermittlung gerade noch möglich ist, sind $Z_1 (16 \mid -4 \mid -4)$ und $Z_2 (8 \mid 8 \mid -4)$.

► **Zeitfenster angeben, in dem Übertragung möglich ist**

Du weißt, dass das U-Boot U_1 die durch den Richtungsvektor $\vec{P_0P_1}$ beschriebene Strecke in einer Minute zurücklegt und dass es sich um 12:21 Uhr im Punkt P_0 befindet. Für $r = 2$ erhältst du also die Position nach zwei Minuten um 12:23 Uhr, für $r = 3$ nach drei Minuten um 12:24 Uhr etc.

Du hast eben berechnet, dass eine Übertragung zu den Zeitpunkten $r = 2$ und $r = 6$ **gerade noch** möglich ist. Also ist im Bereich $2 \leq r \leq 6$ eine Übertragung möglich. Im Sachzusammenhang interpretiert heißt das:

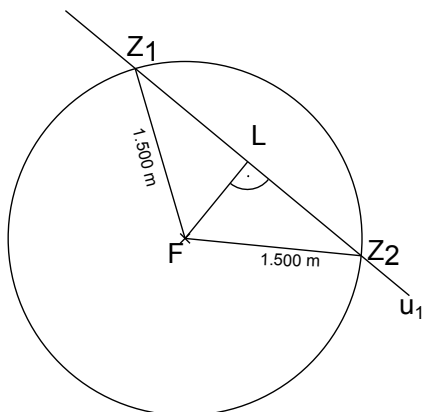
Zwischen 12:23 Uhr und 12:27 Uhr ist eine Übertragung möglich.

► **Punkt mit kleinstem Abstand zur Forschungsstation angeben**

Der Kurs u_1 des U-Boots U_1 wird durch die Gerade u_1 beschrieben. Gesucht ist der Punkt auf dieser Geraden, der vom Punkt F , in dem sich die Forschungsstation befindet, den kleinsten Abstand hat.

Der Abstand von einem Punkt zu einer Geraden wird immer **senkrecht** zur Geraden gemessen. Es muss also das **Lot** vom Punkt F auf die Gerade u_1 gefällt werden. Dieses Lot schneidet die Gerade u_1 im **Lotfußpunkt** L . Dieser Punkt L ist dann der Punkt auf der Geraden u_1 , der den kleinsten Abstand vom Punkt F hat.

Oben, bei der Berechnung von Z_1 und Z_2 , hast du dir die gegenseitige Lage von u_1 und F bereits angesehen. Betrachte diese Lage, unter Berücksichtigung der Punkte Z_1 und Z_2 erneut:



Der Punkt F ist von den Punkten Z_1 und Z_2 mit je 1.500 m gleichweit entfernt. Also bilden die Punkte F , Z_1 und Z_2 ein **gleichschenkliges Dreieck**. Das Lot vom Punkt F auf die Gerade u_1 stimmt überein mit der **Höhe** in diesem Dreieck.

Im gleichschenkligen Dreieck **halbiert** die Höhe die Grundseite des Dreiecks. Also ist der Lotfußpunkt L genau der **Mittelpunkt** der Strecke $\overline{Z_1Z_2}$.

Berechne also L als Mittelpunkt dieser Strecke:

$$\begin{aligned}
 \vec{OL} &= \frac{1}{2} \cdot (\vec{OZ}_1 + \vec{OZ}_2) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 16 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 16+8 \\ -4+8 \\ -4+(-4) \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Im Punkt $L(12 \mid 2 \mid -4)$ hat das U-Boot auf dem Kurs u_1 den kleinsten Abstand von der Forschungsstation.

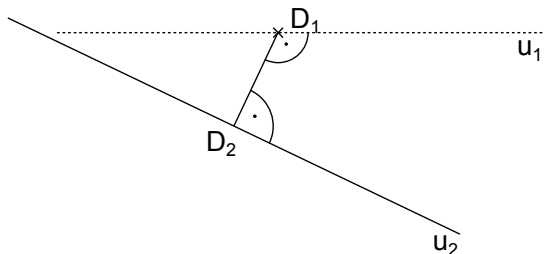
d) ► **Koordinaten von D_2 berechnen**

(4P)

Aus der Aufgabenstellung weißt du:

- Es gibt einen Punkt auf der Geraden u_1 , nämlich D_1 , in dem der Abstand der Geraden u_1 und u_2 minimal wird.
- Gesucht ist nun der Punkt D_2 auf der Geraden u_2 , in dem ebenfalls der Abstand der Geraden u_1 und u_2 minimal wird.

Der Abstand von einem Punkt zu einer Geraden wird immer **senkrecht** zur Geraden gemessen. Der Abstand kann also dargestellt werden, indem man das **Lot** von D_1 auf die Gerade u_2 fällt. Da der Abstand von u_1 und u_2 im Punkt D_1 minimal wird, steht dieses Lot auch senkrecht auf u_1 . Dabei gibt es einen **Lotfußpunkt** auf der Geraden u_2 . Der minimale Abstand der Geraden ist also zugleich der Abstand von D_1 zum Lotfußpunkt. Also ist der Lotfußpunkt auch der Punkt auf u_2 , welcher den kleinsten Abstand zum Kurs u_1 hat und damit unser gesuchter Punkt D_2 .



Eine möglicher Lösungsweg (Lösungsweg A) ist also dieser:

1. Bestimme die Gleichung einer Hilfsebene H , welche den Punkt D_1 enthält und senkrecht zur Geraden u_1 verläuft. Verwende dazu eine Ebenengleichung in Koordinatenform mit Stützvektor $\overrightarrow{OD_1}$. Der Normalenvektor der Hilfsebene H ist der Richtungsvektor der Geraden u_1 .
2. Berechne den Schnittpunkt S der Hilfsebene H mit der Geraden u_2 . Der Verbindungsvektor von S und D_1 liegt in der Ebene H . Deshalb steht dieser Verbindungsvektor senkrecht auf der Geraden u_1 . Da der Abstand von u_1 zu u_2 im Punkt D_1 minimal wird, steht dieser Verbindungsvektor auch senkrecht auf der Geraden u_2 . Also ist der Schnittpunkt S unser gesuchter Punkt D_2 .

Alternativ kannst du auch diesen Lösungsweg (Lösungsweg B) wählen:

1. Der Verbindungsvektor $\overrightarrow{D_1D_2}$ soll senkrecht auf den beiden Geraden u_1 und u_2 stehen. Mit dem **Vektorprodukt** der Richtungsvektoren $\overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{Q_0Q_1}$ erhältst du solch einen Vektor. Wir nennen ihn \vec{n} .
2. Bestimme eine Hilfsgerade h , welche durch den Punkt D_1 verläuft und den Vektor \vec{n} als Richtungsvektor hat. h steht senkrecht auf u_1 und u_2 und verläuft durch D_1 .
3. Berechne den Schnittpunkt S der Hilfsgeraden h mit der Geraden u_2 . Mit der gleichen Begründung wie oben ist dieser Schnittpunkt dann unser gesuchter Punkt D_2 .

►► Lösungsweg A: Lösung über Hilfsebene

1. Schritt: Hilfsebene H bestimmen

Eine Ebenengleichung in Koordinatenform lautet allgemein:

$$H : a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d,$$

wobei a , b und c die Koordinaten des Normalenvektors der Ebene sind und d eine Konstante, die du über eine Punktprobe bestimmen kannst. Die Ebene soll durch den Punkt D_1 verlaufen und senkrecht auf die Gerade u_1 stehen. Wähle also den Richtungsvektor von u_1 als Normalenvektor \vec{n} . Setze anschließend die Koordinaten von D_1 in die Gleichung ein und löse nach d auf.

$$H : 2x - 3y + 0z = d.$$

Einsetzen von $D(10 \mid 5 \mid -4)$ liefert:

$$2 \cdot 10 - 3 \cdot 5 = d$$

$$20 - 15 = d$$

$$5 = d$$

Damit folgt die Ebenengleichung $H : 2x - 3y = 5$.

2. Schritt: Schnittpunkt S von H und u_2 berechnen

Betrachte die Geradengleichung von u_2 :

$$u_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ -14 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Du kannst diese Gleichung zeilenweise betrachten und erhältst so **drei** Gleichungen $x = \dots$, $y = \dots$ und $z = \dots$. Setze diese einzelnen Gleichungen in die Ebenengleichung von H ein und löse nach r auf. Setze zuletzt r wieder in die Geradengleichung von u_2 ein und erhalte so die Koordinaten des gesuchten Punktes:

$$x = 11 - 2r$$

$$y = 9 - 3r$$

$$z = -14 + 2r$$

Zeilenweises Einsetzen ergibt:

$$2 \cdot (11 - 2r) - 3 \cdot (9 - 3r) = 5$$

$$22 - 4r - 27 + 9r = 5$$

$$-5 + 5r = 5 \quad | +5$$

$$5r = 10 \quad | :5$$

$$r = 2$$

Setze $r = 2$ ein in die Geradengleichung von u_2 und erhalte die Koordinaten von D_2 :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OD_2} &= \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ -14 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ -14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 11 & - & 4 \\ 9 & - & 6 \\ -14 & + & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

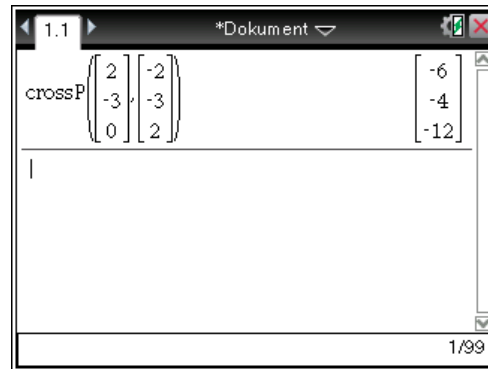
Im Punkt $D_2 (7 \mid 3 \mid -10)$ hat das U-Boot auf dem Kurs u_2 den geringsten Abstand zu u_1 .

►► Lösungsweg B: Lösungsweg über Hilfsgerade

1. Schritt: Vektor \vec{n} berechnen

Vektor \vec{n} soll senkrecht sowohl auf den Richtungsvektor von u_1 als auch auf den von u_2 stehen. Einen solchen Vektor kannst du mit dem Vektorprodukt der beiden Richtungsvektoren berechnen.

Im CAS lautet der Befehl für „Vektorprodukt“ `CrossP`.



Das CAS liefert den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -12 \end{pmatrix}$. Da beim Normalenvektor nicht die **Länge**,

sondern nur die **Richtung** interessiert, kannst du diesen Vektor vereinfachen:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -12 \end{pmatrix} \hat{=} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

2. Schritt: Hilfsgerade h bestimmen

h steht senkrecht auf u_1 und u_2 und verläuft durch den Punkt D_1 . Wähle also den Vektor \vec{n} als **Richtungsvektor** der Geraden h und den Ortsvektor $\overrightarrow{OD_1}$ als **Stützvektor** der Geraden:

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

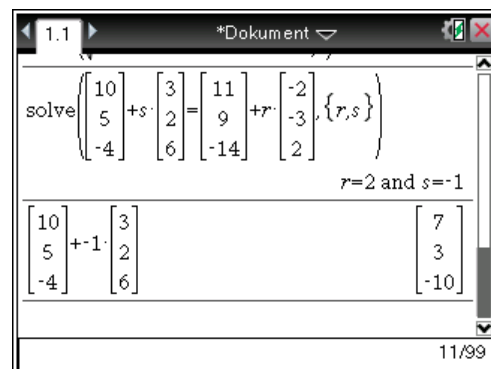
3. Schritt: Schnittpunkt S von h und u_2 berechnen

Der gesuchte Punkt D_2 ist der Schnittpunkt der Hilfsgeraden h mit der Gerade u_2 . Du kannst den Schnittpunkt durch **Gleichsetzen** berechnen:

$$h \cap u_2 \quad \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ -14 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Du kannst diese Gleichung mit dem CAS nach s und r mit dem `solve`-Befehl lösen.

Das CAS liefert $r = 2$ und $s = -1$. Einsetzen einer dieser Parameter in die jeweilige Geradengleichung ergibt den Punkt $D_2(7 | 3 | -10)$.



Im Punkt $D_2(7 | 3 | -10)$ hat das U-Boot auf dem Kurs u_2 den geringsten Abstand zu u_1 .