

**Aufgabenstellung:**

Die Buche ist ein in weiten Teilen Europas heimischer Laubbaum.

Eine frisch eingepflanzte kleine Buche hat eine Höhe von 0,3 m. Ein Biologe modelliert das Höhenwachstum dieser Buche aufgrund von Messungen in den ersten Jahren nach dem Pflanzen durch die Funktion  $f$  mit der Gleichung

$$f(t) = 0,3 + 35 \cdot (1 - e^{-0,02 \cdot t})^2 = 0,3 + 35 \cdot (1 - 2 \cdot e^{-0,02 \cdot t} + e^{-0,04 \cdot t}), t \geq 0.$$

Dabei wird  $t$  als Maßzahl zur Einheit 1 Jahr,  $f(t)$  als Maßzahl zur Einheit 1 Meter aufgefasst.

Der Zeitpunkt der Pflanzung der kleinen Buche wird durch  $t = 0$  festgelegt.

Der Graph von  $f$  ist in Abbildung 1 auf Seite 2 dargestellt.

a) (1) Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen von  $f$  im Sachzusammenhang. (11P)

(2) Berechnen Sie  $f(20)$  und nennen Sie die Bedeutung des Wertes im Sachzusammenhang.

(3) Begründen Sie, dass gemäß der Modellierung die Buche nicht höher als 35,3 m werden kann.

b) Bestimmen Sie rechnerisch den Zeitpunkt  $t_1$ , zu dem die Buche am stärksten wächst. (14P)

[Hinweis: In Abbildung 2 auf Seite 2 ist auch der Graph von  $f'$  dargestellt.

Zur Kontrolle:  $f'(t) = 1,4 \cdot (e^{-0,02 \cdot t} - e^{-0,04 \cdot t})$ ;  $f''(t) = 0,028 \cdot (2 \cdot e^{-0,04 \cdot t} - e^{-0,02 \cdot t})$ ]

c) In Abbildung 2 ist neben dem Graphen der Wachstumsgeschwindigkeit  $f'$  der oben genannten Buche auch der Graph der Wachstumsgeschwindigkeit  $g'$  einer zweiten Buche mit der Gleichung  $g'(t) = 1,1 \cdot (e^{-0,02 \cdot t} - e^{-0,04 \cdot t})$ ,  $t \geq 0$ , dargestellt. Die zweite Buche wurde an einem anderen Standort zum selben Zeitpunkt wie die erste Buche gepflanzt. Bei der Pflanzung war auch die zweite Buche 0,3 m hoch. (15P)

(1) Beschreiben Sie den zeitlichen Verlauf der Wachstumsgeschwindigkeiten der beiden Buchen im Vergleich.

(2) Begründen Sie, dass der Graph von  $g'$  an derselben Stelle ein Maximum besitzt wie der Graph von  $f'$ .

(3) Begründen Sie anhand der Abbildung 2, dass die erste Buche zu jedem Zeitpunkt  $t > 0$  eine größere Höhe hat als die zweite Buche.

d) (1) Zeigen Sie, dass die Funktion  $h$  mit der Gleichung  $h(t) = 27,5 \cdot (e^{-0,04 \cdot t} - 2 \cdot e^{-0,02 \cdot t})$ ,  $t \geq 0$ , eine Stammfunktion von  $g'$  ist. (10P)

(2) Jemand behauptet, dass die beiden Buchen 50 Jahre nach ihrer Anpflanzung gemäß den Modellierungen ihres Höhenwachstums einen Höhenunterschied von mindestens 3,50 m aufweisen müssten.

Prüfen Sie, ob die Behauptung wahr ist.

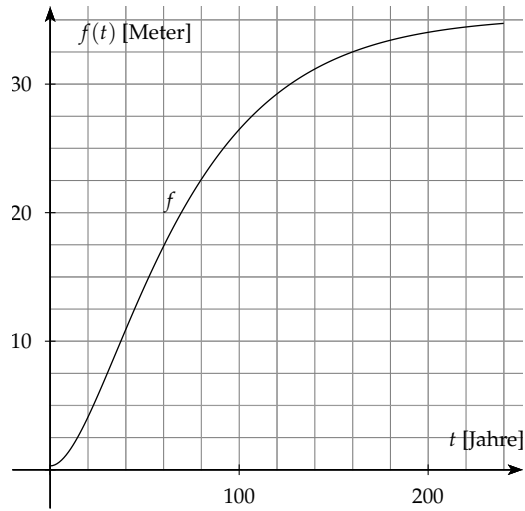


Abbildung 1

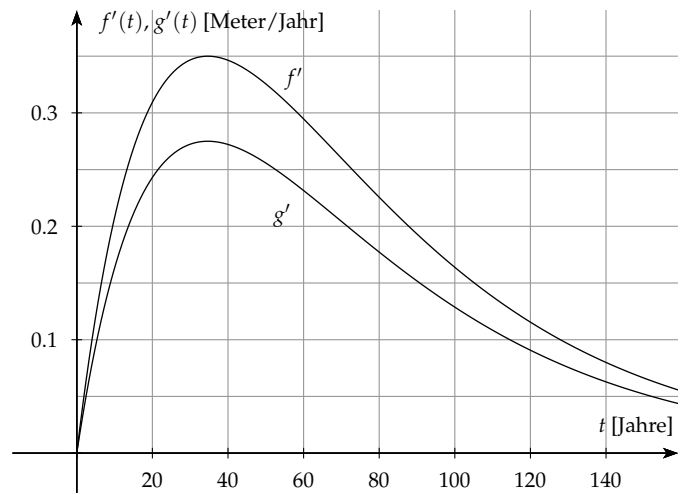


Abbildung 2