1.1 ► Schnittpunkt von *E* und *g* (4P)

Gesucht ist der Schnittpunkt der Ebene E mit der Geraden g. In einem Schnittpunkt sind die Koordinaten eines Punktes der Geraden gleich den Koordinaten eines Punktes der Ebene, es gilt damit die Bedingung:

$$\overrightarrow{x}_E = \overrightarrow{x}_g.$$

Die Gleichung der Geraden ist bekannt, die Parametergleichung der Ebene muss noch aufgestellt werden.

Die Parametergleichung einer Ebene hat allgemein die Form:

$$E:\quad \overrightarrow{x} = \overrightarrow{\text{Stützvektor}} + r\cdot\overrightarrow{\text{Spannvektor}_1} + s\cdot\overrightarrow{\text{Spannvektor}_2}.$$

Ein Stützvektor ist dabei der Ortsvektor eines Punktes der Ebene und die Spannvektoren sind Verbindungsvektoren von jeweils zwei Punkten, die in der Ebene liegen. Die Spannvektoren dürfen dabei keine Vielfache voneinander sein.

Ist die Parametergleichung aufgestellt, so kann diese mit der Geradengleichung gleichgesetzt werden und das Ergebnis in seine drei Zeilen aufgespalten werden. Es ergibt sich ein lineares Gleichungssystem mit den Variablen r, s und t, das sich lösen lässt.

Eine Lösung - etwa die für t - kann dann in die Geradengleichung eingesetzt werden, um damit den Ortsvektor und damit die Koordinaten des Schnittpunktes zu berechnen.

Es sind also drei Schritte notwendig:

1. Parametergleichung der Ebene E aufstellen.
2. Gleichungssystem aufstellen und lösen.
3. Koordinaten des Schnittpunktes berechnen.

1. Schritt: Parametergleichung von *E*

Die Parametergleichung einer Ebene lautet allgemein

$$E:\quad \overrightarrow{x} = \overrightarrow{\text{Stützvektor}} + r\cdot\overrightarrow{\text{Spannvektor}_1} + s\cdot\overrightarrow{\text{Spannvektor}_2}.$$

Als Stützvektor kann in unserem Fall der Ortsvektor $\overrightarrow{OA}$ mit

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dienen.

Geeignete Spannvektoren sind die Verbindungsvektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$. Ihre Koordinaten lassen sich über die Differenz ihrer Endpunkte berechnen:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2-(-5) \\ 3-2 \\ -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1-(-5) \\ 3-2 \\ -2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Für die Parametergleichung von E folgt:

$$E: \quad \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$E: \quad \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

2. Schritt: Gleichungssystem aufstellen und lösen

Für den Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene gilt

$\overrightarrow{x}_E = \overrightarrow{x}_g$.

Setze die Geradengleichung von g und die Parametergleichung von E in die Gleichung ein spalte das Ergebnis in seine drei Zeilen auf, sodass ein lineares Gleichungssystem entsteht.

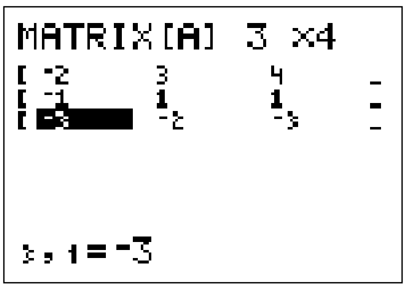
$$\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

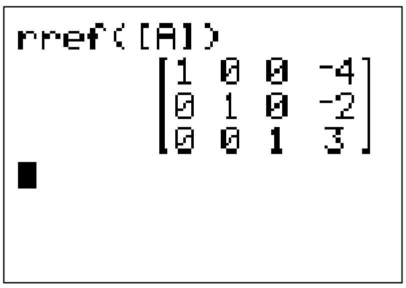
$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 9 + 2t & = & -5 + 3r + 4s \\ \text{II} & 7 + t & = & 2 + r + s \\ \text{III} & 8 + 3t & = & 1 - 2r + 3s \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 14 & = & -2t + 3r + 4s \\ \text{II} & 5 & = & -t + r + s \\ \text{III} & 7 & = & -3t - 2r - 3s \end{array}$$

Löse dieses Gleichungssystem mithilfe des GTR.

Gehe in deinem GTR über $\boxed{\text{2ND} \rightarrow \text{MATRX} \rightarrow \text{EDIT}}$ in den Matrix-Editor und füge dort das Gleichungssystem ein. Verlasse diesen dann mit $\boxed{\text{2ND} \rightarrow \text{QUIT}}$ und gib im Anschluss den Befehl zum Lösen der Matrix über $\boxed{\text{2ND} \rightarrow \text{MATRX} \rightarrow \text{MATH} \rightarrow \text{ALPHA} \rightarrow \text{B}}$ ein. Die Matrix selbst kannst du mit $\boxed{\text{2ND} \rightarrow \text{MATRX} \rightarrow \text{NAMES}}$ einsetzen.





Der GTR liefert eindeutige Werte für r, s und t:

$\boldsymbol{r = -2}$, $\boldsymbol{s = 3}$ und $\boldsymbol{t = -4}$.

3. Schritt: Koordinaten des Schnittpunktes

Durch Einsetzen des Ergebnisses für t in die Geradengleichung erhältst du den Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$ eines Schnittpunktes P der Geraden g mit der Ebene E:

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-8 \\ 7-4 \\ 8-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt P von g und E hat damit die Koordinaten

$P(1\,|\,3\,|-4)$.

1.2 ► **Koordinaten eines Punktes *S*, sodass die Pyramide das Volumen 30 hat** (6P)

Gesucht sind die Koordinaten eines Punktes S auf der x_3-Achse, für die die Pyramide OS_1S_2S das Volumen 30 hat. Dabei sind S_1 und S_2 die Schnittpunkte der Ebene mit der x_1- und x_2-Achse und O der Ursprung bei

$O(0\,|\,0\,|\,0)$.

Ein Punkt auf der x_1-Achse hat immer die x_2- und x_3-Koordinaten gleich Null. Für S_1 gilt damit:

$S_1(x_1\,|\,0\,|\,0)$.

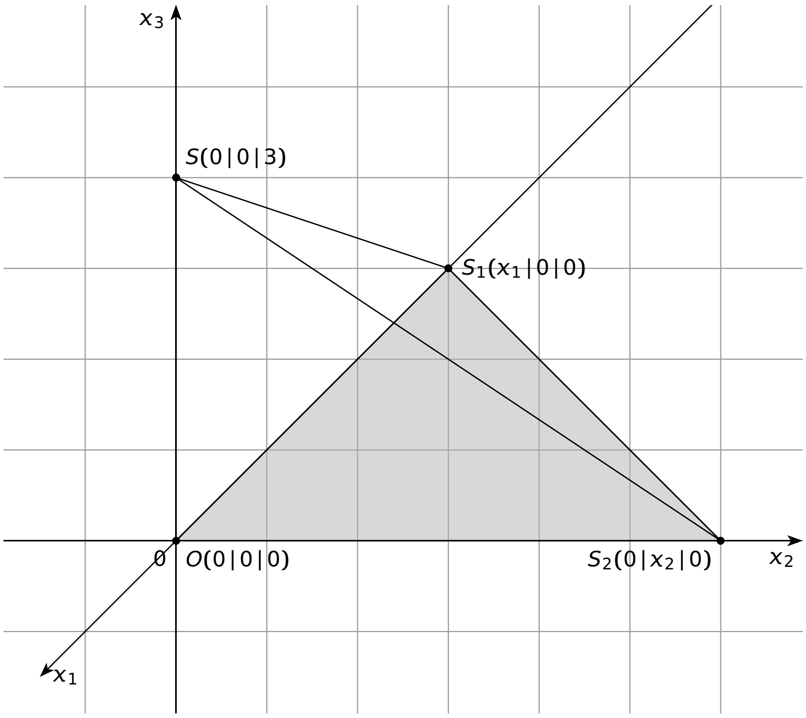
Ein Punkt auf der x_2-Achse hat immer die x_1- und x_3-Koordinaten gleich Null. Für S_2 gilt damit:

$S_2(0\,|\,x_2\,|\,0)$.

Ein Punkt auf der x_3-Achse hat immer die x_1- und x_2-Koordinaten gleich Null. Für S gilt damit schließlich:

$S(0\,|\,0\,|\,x_3)$.

Zur besseren Vorstellung einer solchen Pyramide ist hier eine Skizze sinnvoll:



Das Volumen V einer Pyramide berechnet sich allgemein über die Formel:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe}.$$

Aus der Skizze kannst du erkennen, dass die Grundfläche G (grau schattiert) ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel im Ursprung darstellt. Ebenso ist erkennbar, dass die Höhe der Pyramide gerade der Strecke $\overline{OS}$ entspricht. Dies ist darin begründet, dass die Eckpunkte der Pyramide jeweils auf den Koordinatenachsen liegen, sodass OS_1, OS_2 und OS senkrecht aufeinander stehen.

Die Fläche G eines Dreiecks wird allgemein mit der Formel

$$G = \frac{1}{2} \cdot \text{Grundseite} \cdot \text{Höhe}$$

berechnet. Da es sich bei der Grundfläche um ein rechtwinkliges Dreieck handelt, können wir die Strecke $\overline{OS_2}$ als Grundseite und die Strecke $\overline{OS_1}$ als Höhe nehmen. Es folgt daraus:

$$G = \frac{1}{2} \cdot \overline{OS_2} \cdot \overline{OS_1}.$$

Für das Volumen der Pyramide gilt damit schließlich:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{OS_2} \cdot \overline{OS_1} \cdot \overline{OS}.$$

Das Volumen soll 30 VE betragen, es folgt die Gleichung:

$$30 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{OS_2} \cdot \overline{OS_1} \cdot \overline{OS}.$$

Um die Koordinaten von S zu bestimmen, müssen wir also

- den Ortsvektor $\overrightarrow{OS_1}$ von S_1 und den Ortsvektor $\overrightarrow{OS_2}$ von S_2 bestimmen,
- anschließend die Längen der Vektoren bestimmen und
- die Volumengleichung nach $\overline{OS}$ auflösen.

1. Schritt: Ortsvektoren $\overline{OS_1}$ und $\overline{OS_2}$

Ein Punkt auf der x_1-Achse hat immer die x_2- und x_3-Koordinaten gleich Null. Für S_1 gilt damit:

$S_1(x_1\,|\,0\,|\,0)$.

Zudem wissen wir, dass S_1 in der Ebene E liegt. Daraus können wir eine Gleichung formulieren:

$$\overrightarrow{OS_1} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

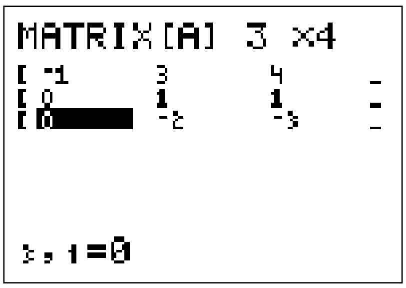
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

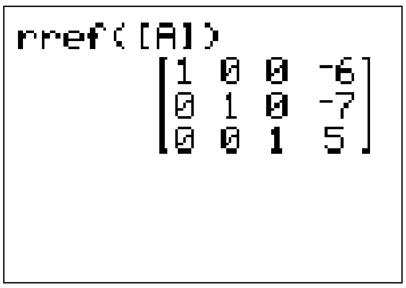
Aus dieser Gleichung lässt durch Aufspalten in die drei Zeilen ein lineares Gleichungssystem mit den Variablen r, s und x_1 aufstellen:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{I} & x_1 &=& -5 + 3r + 4s \\
\text{II} & 0 &=& 2 + r + s \\
\text{III} & 0 &=& 1 - 2r - 3s \\
\text{I} & 5 &=& -x_1 + 3r + 4s \\
\text{II} & -2 &=& 0 + r + s \\
\text{III} & -1 &=& 0 - 2r - 3s
\end{array}$$

Löse dieses Gleichungssystem mithilfe des GTR.

Gehe in deinem GTR über $\boxed{\text{2ND} \to \text{MATRX} \to \text{EDIT}}$ in den Matrix-Editor und füge dort das Gleichungssystem ein. Verlasse diesen dann mit $\boxed{\text{2ND} \to \text{QUIT}}$ und gib im Anschluss den Befehl zum Lösen der Matrix über $\boxed{\text{2ND} \to \text{MATRX} \to \text{MATH} \to \text{ALPHA} \to \text{B}}$ ein. Die Matrix selbst kannst du mit $\boxed{\text{2ND} \to \text{MATRX} \to \text{NAMES}}$ einsetzen.





Der GTR liefert für x_1

$x_1 = -6.$

Für die Koordinaten von $\overrightarrow{OS_1}$ folgt daraus:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OS_1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{-6} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Bestimme analog dazu $\overrightarrow{OS_2}$.

Ein Punkt auf der x_2-Achse hat immer die x_1- und x_3-Koordinaten gleich Null. Für S_2 gilt damit:

$S_2(0\,|\,x_2\,|\,0).$

Zudem wissen wir, dass S_2 wie S_1 in der Ebene E liegt. Daraus können wir eine Gleichung formulieren:

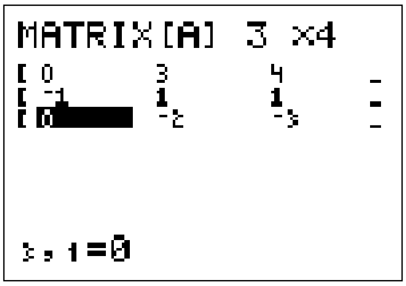
$$\overrightarrow{OS_1} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

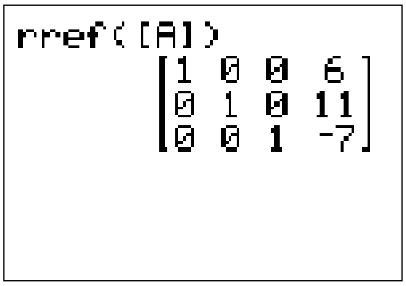
$$\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Hieraus folgt das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{llrl} \text{I} & 5 &= & 0 + 3r + 4s \\ \text{II} & -2 &= & -x_2 + r + s \\ \text{III} & -1 &= & 0 - 2r - 3s \end{array}$$

Löse dieses Gleichungssystem mithilfe des GTR.





Der GTR liefert für x_2

$x_2 = 6.$

Für die Koordinaten von $\overrightarrow{OS_2}$ folgt daraus:

$$\boldsymbol{\overrightarrow{OS_2}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{6} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

2. Schritt: Längen der Verktoren

In der Volumengleichung werden nun die Längen der Verktoren $\overrightarrow{OS_1}$ und $\overrightarrow{OS_2}$ benötigt. Die länge kannst du ohne weitere Rechnung aus ihren Koordinaten ablesen:

Dem Vektor

$$\overrightarrow{OS_1} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

entspricht eine Bewegung von 6 LE gegen die x_1-Richtung, die Strecke $\overline{OS_1}$ hat damit die Länge

$$\overline{OS_1} = 6.$$

Dem Vektor

$$\overrightarrow{OS_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

entspricht eine Bewegung von 6 LE in die x_2-Richtung, die Strecke $\overline{OS_2}$ hat damit ebenso die Länge

$$\overline{OS_2} = 6.$$

3. Schritt: Volumengleichung nach $\boldsymbol{\overline{OS}}$ auflösen

Setze nun die Werte für $\overline{OS_1}$ und $\overline{OS_2}$ in die Volumengleichung ein und löse nach $\overline{OS}$ auf:

$$\begin{aligned} 30 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{OS_2} \cdot \overline{OS_1} \cdot \overline{OS} \\ 30 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \overline{OS} \\ 30 &= 6 \cdot \overline{OS} \\ 5 &= \overline{OS} \end{aligned}$$

Ein Punkt auf der x_3-Achse hat immer die x_1- und x_2-Koordinaten gleich Null. Für S gilt damit:

$$S(0\,|\,0\,|\,x_3)$$

und für den Ortsvektor $\overrightarrow{OS}$ entsprechend:

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Analog zu den anderen beiden Vektoren beschreibt $\overrightarrow{OS}$ daher eine Bewegung entlang der x_3-Achse, **in** oder **gegen** die x_3-Richtung. Nun hat die Höhe der Pyramide eine Länge von

$\overline{OS} = 5\,\text{LE}$,

wir bewegen uns durch diesen Vektor also 5 Einheiten in oder gegen die x_3-Richtung. x_3 kann damit entweder den Wert 5 oder -5 annehmen, damit die Länge stimmt.

Die Koordinaten von S lauten damit:

$S(0\,|\,0\,|\,\pm 5)$.

1.3 ► **Werte für a und b, für die g und h parallel und verschieden sind** (5P)

Zwei Geraden sind dann parallel und verschieden, wenn

- ihre Richtungsvektoren Vielfache voneinander sind und
- ein Punkte einer Geraden nicht auf der anderen Geraden liegt.

Wenn Richtungsvektoren Vielfache voneinander sind, kann ein Vektor durch das Produkt des anderen Vektors mit einem Parameter k mit $k \in \mathbb{R}$ dargestellt werden. Angewandt auf g und h folgt daraus:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 2-4a \end{pmatrix}.$$

Für denjenigen Wert von a, für den ein Wert k existiert, sind die beiden Geraden parallel.

Sind die zwei Geraden parallel, so sind sie nur dann verschieden, wenn ein Punkt einer Geraden nicht auf der anderen Geraden liegt. Dies kann man mithilfe einer Punktprobe prüfen.
Hierzu kannst du den Stützvektor von g in die Geradengleichung von h einsetzen:

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 2-4a \end{pmatrix}.$$

Für diejenigen Werte von b, für die die Gleichung erfüllt ist, liegen die Geraden dann ineinander. Für alle anderen b sind g und h verschieden.

Löse die beiden Gleichungen nun nach a und b auf:

Die erste Gleichung lässt sich in drei Zeilen aufspalten:

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 2 &=& -4k \\ \text{II} & 1 &=& -2k \\ \text{III} & 3 &=& k\cdot(2-4a) \end{array}$$

Du siehst: I und II sind Vielfache voneinander. Eine der Gleichungen kann also fallen gelassen werden. Löse das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{llrl} \text{II} & 1 = & -2k & \mid :(-2) \\ \text{III} & 3 = & k\cdot(2-4a) & \end{array}$$

$$\begin{array}{llrl} \text{II} & k = & -\dfrac{1}{2} & \text{Setze in III ein:} \\ \text{III} & 3 = & k\cdot(2-4a) & \end{array}$$

$$\begin{array}{llrl} \text{III} & 3 = & -\dfrac{1}{2}\cdot(2-4a) & \\ \text{III} & 3 = & -1+2a & \mid +1 \\ \text{III} & 4 = & 2a & \mid :2 \\ \text{III} & \boldsymbol{a} = & \mathbf{2} & \end{array}$$

Für $a=2$ und $k=-\frac{1}{2}$ sind die Richtungsvektoren damit parallel.

Du kannst die Geradengleichung von h also anpassen:

$$h\colon\ \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} b \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 2-4\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} \,\widehat{=}\, \begin{pmatrix} b \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Mache nun die Punktprobe, indem du den Stützvektor von g in die Gleichung von h einsetzt, und ermittle, wenn möglich, Werte für b:

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Du kannst die Gleichung in ihre drei Zeilen aufspalten und als Gleichungssystem formulieren:

$$\begin{array}{llrl} \text{I} & 9 = & b + 2r & \\ \text{II} & 7 = & 4 + r & \mid -4 \\ \text{III} & 8 = & -1 + 3r & \mid +1 \end{array}$$

$$\begin{array}{llr} \text{I} & 9 = & b + 2r \\ \text{II} & 3 = & r \\ \text{III} & 9 = & 3r \end{array}$$

Hier sind II und III Vielfache voneinander. Eine der Gleichungen kann also fallen gelassen werden. Löse das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{llrl} \text{I} & 9 = & b + 2r & \\ \text{II} & 3 = & r & \text{Setze in I ein:} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{I} & 9 = & b + 2\cdot 3 \\ \text{I} & \boldsymbol{b} = & \mathbf{3} \end{array}$$

Für $b=3$ hat das System eine Lösung, für diesen Wert liegt der Stützvektor von g damit auf der Geraden h, sie sind in diesem Fall identisch.

Da es keine weiteren Lösungen für b gibt, sind g und h für alle anderen b verschieden.

g und h sind also für $a = 2$ und $b \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ parallel und verschieden.