$f(t) = 8 \cdot t \cdot \mathrm{e}^{-0{,}25t}, \quad t \in [0;\, 24]$

a) **Beschreibung des Verlaufs des Graphen im Sachzusammenhang** (7VP)

Bei der Einnahme des Medikaments nach $t = 0$ Zeitschritten befindet sich noch kein Wirkstoff im Blut, in den ersten 4 Stunden steigt die Wirkstoffkonzentration jedoch rasant an, wobei die maximale Konzentration nach 4 Stunden ca. 12 $\frac{\text{mg}}{\ell}$ beträgt. Danach sinkt die Konzentration langsam wieder, nach 24 Stunden liegt sie dann fast wieder bei 0 $\frac{\text{mg}}{\ell}$.

Berechnung der Wirkstoffkonzentration nach 24 Stunden

Die Wirkstoffmenge ergibt sich als Funktionswert von f nach $t = 24$ Stunden:

$$f(24) = 8 \cdot 24 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}25 \cdot 24} = 192 \cdot \mathrm{e}^{-6} \approx 0{,}48$$

Nach 24 Stunden befinden sich noch etwa $0{,}48$ $\frac{\text{mg}}{\ell}$ des Wirkstoffs im Blut des Patienten.

b) **Berechnung der maximalen Wirkstoffkonzentration** (12VP)

Um die maximale Wirkstoffmenge zu berechnen, muss das **Maximum** von f bestimmt werden. Dazu wird f zunächst mithilfe der Produktregel zweimal abgeleitet. Dabei ist zu beachten, dass die Ableitung von $\mathrm{e}^{-0{,}25t}$ nach der Kettenregel
$\left(\mathrm{e}^{-0{,}25t}\right)' = \mathrm{e}^{-0{,}25t} \cdot (-0{,}25) = -0{,}25\mathrm{e}^{-0{,}25t}$ lautet:

$$\begin{aligned} f'(t) &= 8 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}25t} + 8t \cdot \left(-0{,}25\mathrm{e}^{-0{,}25t}\right) \\ &= 8\mathrm{e}^{-0{,}25t} - 2t\mathrm{e}^{-0{,}25t} && \mid \mathrm{e}^{-0{,}25t} \text{ ausklammern} \\ &= \mathrm{e}^{-0{,}25t}(8 - 2t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(t) &= (-2) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}25t} + (8 - 2t) \cdot \left(-0{,}25\mathrm{e}^{-0{,}25t}\right) && \mid \mathrm{e}^{-0{,}25t} \text{ ausklammern} \\ &= -2 \cdot \mathrm{e}^{0{,}25t} - 2 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}25t} + 0{,}5t \cdot \mathrm{e}^{-0{,}25t} \\ &= (-4 + 0{,}5t)\mathrm{e}^{-0{,}25t} \end{aligned}$$

Die Maximumsstelle ist diejenige Stelle, an der $f'(t)$ den Wert Null annimmt:

$$\begin{aligned} f'(t) &= 0 \\ \mathrm{e}^{-0{,}25t}(8 - 2t) &= 0 && \mid \mathrm{e}^{-0{,}25t} \text{ ist als Exponentialfunktion stets größer Null!} \\ 8 - 2t &= 0 \\ t &= 4 \end{aligned}$$

Es ergibt sich also $t = 4$ als einzige mögliche Extremstelle. Um sie als Maximumsstelle nachzuweisen, wird der Funktionswert der 2. Ableitung an dieser Stelle bestimmt:

$$f''(4) = \mathrm{e}^{-0{,}25 \cdot 4}(-4 + 0{,}5 \cdot 4) = \mathrm{e}^{-1} \cdot (-2) = -2\mathrm{e}^{-1} \approx -0{,}74 < 0$$

Damit ist $t = 4$ die einzige lokale Maximimusstelle von $f(t)$. Die Wirkstoffkonzentration zu diesem Zeitpunkt beträgt dabei:

$$f(4) = 8 \cdot 4 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}25 \cdot 4} = 32\mathrm{e}^{-1} \approx 11{,}77\ \tfrac{\text{mg}}{\ell}.$$

Hinweis: Alternativ kann die Extremstelle bei $t = 4$ dadurch begründet werden, dass $f'(t)$ bei $t = 4$ einen Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$ hat.

Es muss nun noch ausgeschlossen werden, dass sich an den **Rändern des Definitionsbereichs** noch größere Werte, sogenannte Randextrema, befinden. Dazu werden die Funktionswerte an den Randstellen $t = 0$ und $t = 24$ ausgewertet:

$f(0) = 8 \cdot 0 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}25 \cdot 0} = 0 \cdot \mathrm{e}^0 = 0$

$f(24) \approx 0,48$

Die Funktionswerte an den Rändern sind nicht größer, daher ist das lokale Maximum bei $t = 4$ auch das absolute Maximum.

Die maximale Wirkstoffmenge wird nach 4 Stunden erreicht und beträgt dann etwa $11,77\ \frac{\text{mg}}{\ell}$.

c) **Nachweis des einzigen Wendepunktes bei $t = 8$** (11VP)

Die Wendestelle ist diejenige Stelle, an der $f''(t) = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} f''(t) &= 0 \\ \mathrm{e}^{-0{,}25t}(-4 + 0,5t) &= 0 \qquad \mid \mathrm{e}^{-0{,}25t} \text{ ist wiederum stets größer als Null} \\ -4 + 0,5t &= 0 \\ t &= 8 \end{aligned}$$

Um nachzuweisen, dass an der Stelle $t = 8$ auch wirklich eine Wendestelle vorliegt, wird der Wert in die dritte Ableitung eingesetzt, denn hier muss dann $f'''(8) \neq 0$ gelten. Die dritte Ableitung ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} f'''(t) &= 0,5 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}25t} + (-4 + 0,5t) \cdot \left(-0,25\mathrm{e}^{-0{,}25t}\right) \\ &= 0,5 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}25t} + 1 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}25t} - 0,125t \cdot \mathrm{e}^{-0{,}25t} \qquad \mid \mathrm{e}^{-0{,}25t} \text{ ausklammern} \\ &= \mathrm{e}^{-0{,}25t}(1,5 - 0,125t) \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$f'''(8) = (1,5 - 0,125 \cdot 8) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}25 \cdot 8} = 0,5\mathrm{e}^{-2} > 0$

Damit hat der Graph von f seinen einzigen Wendepunkt an der Stelle $t = 8$.

Hinweis: Alternativ kann der Wendepunkt auch mit dem Vorzeichenwechsel der zweiten Ableitung von $-$ zu $+$ an der Stelle $t = 8$ begründet werden.

Begründung, dass die Konzentration bei $t = 8$ am stärksten abnimmt

Die Konzentrationsändern (also auch die Abnahme) wird in diesem Beispiel durch die **erste Ableitung** von $f(t)$ angegeben.

Wenn die Abnahme an der Wendestelle $t = 8$ am stärksten sein soll, bedeutet dies, dass die erste Ableitung hier ein **Minimum** besitzen muss. Dies wurde schon dadurch gezeigt, dass die zweite Ableitung (also praktisch die Ableitung der ersten Ableitung) an dieser Stelle gleich Null und die dritte Ableitung größer Null ist!

Die Änderung an der Stelle $t = 8$ beträgt dabei $f'(8) = \mathrm{e}^{-0{,}25 \cdot 8}(8 - 2 \cdot 8) = -8\mathrm{e}^{-2} \approx -1,08$, ist also negativ und beschreibt somit eine **Abnahme**.

Es muss nun nur noch gezeigt werden, dass $f'(8)$ auch tatsächlich die stärkste Abnahme auf dem Definitionsbereich beschreibt. Dazu werden, wie in Teilaufgabe b), die Randwerte der ersten Ableitung untersucht:

$f'(0) = \mathrm{e}^{-0{,}25 \cdot 0}(8 - 2 \cdot 0) = \mathrm{e}^0 \cdot 8 = 1 \cdot 8 = 8$

$f'(24) = \mathrm{e}^{-0{,}25 \cdot 24}(8 - 2 \cdot 24) = \mathrm{e}^{-6} \cdot (-40) = -40\mathrm{e}^{-6} \approx -0,0992$

An den Randstellen ist die erste Ableitung größer als an der Wendestelle, daher nimmt die Wirkstoffkonzentration zu diesem Zeitpunkt auch wirklich am stärksten ab.

d) **Nachweis der Stammfunktion von $f(t)$** (11VP)

Um die gegebene Funktion $F(t)$ als Stammfunktion nachzuweisen, muss gezeigt werden, dass $F'(t) = f(t)$ gilt. $F(t)$ wird daher wiederum nach der Produkt- und Kettenregel abgeleitet:

$$\begin{aligned} F'(t) &= -32 \cdot \left(1 \cdot \mathrm{e}^{-0,25t} + (t+4) \cdot \left(-0,25\mathrm{e}^{-0,25t}\right)\right) \\ &= -32 \cdot \left(\mathrm{e}^{-0,25t} - 0,25t\mathrm{e}^{-0,25t} - 1 \cdot \mathrm{e}^{-0,25t}\right) \qquad \mid \mathrm{e}^{-0,25t} \text{ ausklammern} \\ &= -32 \cdot \mathrm{e}^{-0,25t} \cdot (1 - 0,25t - 1) \\ &= -32 \cdot (-0,25t) \cdot \mathrm{e}^{-0,25t} \\ &= 8t\mathrm{e}^{-0,25t} = f(t) \end{aligned}$$

Damit ist nachgewiesen, dass $F(t)$ eine Stammfunktion von $f(t)$ ist.

Berechnung der mittleren Wirkstoffkonzentration in den ersten 12 Stunden

Die mittlere Wirkstoffkonzentration in den ersten 12 Stunden, also im Intervall [0; 12] kann mit der gegebenen Formel und der Stammfunktion von F berechnet werden:

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{12-0} \int_0^{12} f(t)\,dt = \frac{1}{12} \cdot [F(t)]_0^{12} = \frac{1}{12} \cdot (F(12) - F(0)) \\ &= \frac{1}{12}\left(-32 \cdot (12+4) \cdot \mathrm{e}^{-0,25 \cdot 12} - (-32) \cdot (0+4) \cdot \mathrm{e}^{-0.25 \cdot 0}\right) \\ &= \frac{1}{12}\left(-512 \cdot \mathrm{e}^{3} + 128 \cdot \mathrm{e}^{0}\right) \\ &\approx 8,54 \end{aligned}$$

Die mittlere Wirkstoffkonzentration in den ersten 12 Stunden betrug etwa $8,54\ \frac{\text{mg}}{\ell}$.

e) **Bestimmung der Tangentengleichung** (9VP)

Die Tangente g soll im Punkt $(24 \mid f(24))$, also mit genauen Werten im Punkt $(24 \mid 192\mathrm{e}^{-6})$ an den Graphen von f gelegt werden. Da sie eine Gerade ist, hat sie dabei eine allgemeine Gleichung von $g\colon y = m \cdot t + c$ mit der Steigung m und dem y-Achsenabschnitt c.

Ihre Steigung entspricht der Steigung des Graphen an der Stelle $t = 24$:

$m = f'(24) = -40\mathrm{e}^{-6}$ (aus Teilaufgabe c))

Als Ansatz ergibt sich also $g\colon y = -40\mathrm{e}^{-6} \cdot t + c$. Um den fehlenden Wert c zu ermitteln, werden die Koordinaten des Punktes $(24 \mid 192\mathrm{e}^{-6})$ in die Gleichung eingesetzt, denn dieser Punkt liegt auf der Tangente:

$$\begin{aligned} 192\mathrm{e}^{-6} &= -40\mathrm{e}^{-6} \cdot 24 + c \\ c &= 192\mathrm{e}^{-6} + 960\mathrm{e}^{-6} \\ c &= 1.152\mathrm{e}^{-6} \end{aligned}$$

Für die Tangente ergibt sich damit die Gleichung:

$g\colon y = -40\mathrm{e}^{6} \cdot t + 1.152\mathrm{e}^{-6}$, oder näherungsweise $g\colon y = -0,10t + 2,86$.

Hinweis: Wird der Wert c mit den gerundeten Werten $m \approx -0,10$ und dem Punkt $(24 \mid 0,48)$ berechnet, ergibt sich $c \approx 2,88$.

Berechnung des Zeitpunkts, an dem der Wirkstofff vollständig abgebaut ist

Da die Wirkstoffkonzentration nun durch die Tangente beschrieben wird, ist der Wirkstoff genau dann abgebaut, wenn $g(t) = 0$ ist. Es ist also die Nullstelle der Tangente gesucht:

$$\begin{aligned} y = g(t) &= 0 \\ -40\mathrm{e}^{-6} \cdot t + 1.152\mathrm{e}^{-6} &= 0 && \mid -1.152\mathrm{e}^{-6} \\ -40\mathrm{e}^{-6} \cdot t &= -1.152\mathrm{e}^{-6} && \mid: (-40\mathrm{e}^{-6}) \\ t &= \frac{-1.152\mathrm{e}^{-6}}{-40\mathrm{e}^{-6}} \approx 28,8 \end{aligned}$$

Nach diesem Modell ist der Wirkstoff somit nach ca. $28,8$ Stunden, also 28 Stunden und 48 Minuten abgebaut.

Hinweis: Wurde mit den gerundeten Werten gerechnet, ergibt sich als Ergebnis 28 Stunden und 36 Minuten.