a) (1) ▶ **Nachweisen, dass Q auf Geraden g liegt** (6 BE)

Willst du nachweisen, dass ein Punkt auf einer Geraden liegt, dann setzt du den Ortsvektor des Punktes in die entsprechende Geradengleichung ein. Setze hier die Ortsvektor von Q für $\overrightarrow{x}$ in die Geradengleichung von g ein:

$$\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\8\\8\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\-6\\-4\end{pmatrix}$$

Wertest du diese Gleichung Zeile für Zeile aus, so entstehen diese drei Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 0 = -2 + 2 \cdot s \\ \text{II} & 2 = 8 - 6 \cdot s \\ \text{III} & 4 = 8 - 4 \cdot s \end{array}$$

Liegt Q auf der Geraden, so muss sich für s in allen drei Gleichungen der gleiche Wert ergeben.
Lösen der Gleichungen:

$$\begin{array}{lrcll} \text{I} & 0 &=& -2 + 2 \cdot s & \mid -2 \cdot s \\ & -2 \cdot s &=& -2 & \mid : (-2) \\ & s &=& 1 & \end{array}$$

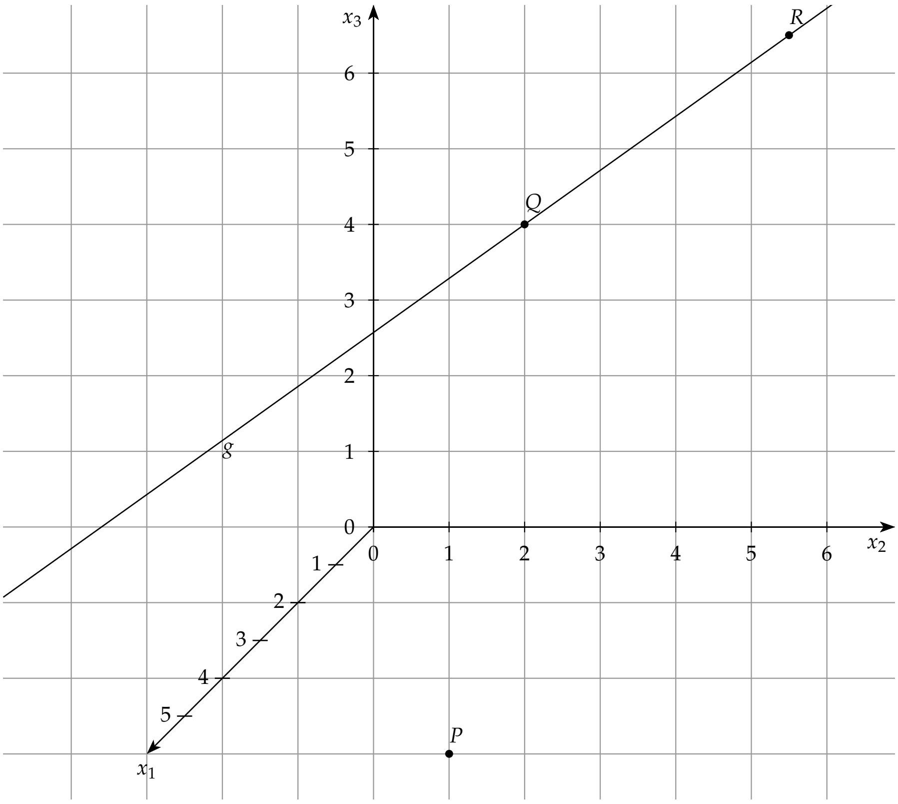
$$\begin{array}{lrcll} \text{II} & 2 &=& 8 - 6 \cdot s & \mid -8 \\ & -6 &=& -6 \cdot s & \mid : (-6) \\ & s &=& 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcll} \text{III} & 4 &=& 8 - 4 \cdot s & \mid -8 \\ & -4 &=& -4 \cdot s & \mid : (-4) \\ & s &=& 1 & \end{array}$$

Da sich in allen drei Gleichungen der gleiche Wert für s ergeben hat, hast du gezeigt, dass Punkt Q auf der Geraden g liegt.

(2) ► **Zeichnen der Punkte und der Geraden in ein räumliches Koordinatensystem**

Hinweis: Zeichne die Gerade g durch Verbinden der Punkte Q und R.
Deine Zeichnung sollte so aussehen:



b) (1) ► **Bestimmen der gegenseitigen Lage von g und k für die gegebenen Werte für a und b** (14 BE)

Für $a = 0$ und $b = -6$ ergibt sich diese Gerade:

$$k : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Die gegenseitige Lage von g und k untersuchst du, indem du vorerst die Richtungsvektoren der Geraden vergleichst. Überprüfe dazu, ob ein Richtungsvektor ein Vielfaches des anderen ist, um damit diese Vektoren auf lineare Abhängigkeit untersuchen.
Dies könntest du beispielsweise so untersuchen:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Daraus ergeben sich diese drei Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 2 = -3 \cdot x \\ \text{II} & -6 = -6 \cdot x \\ \text{III} & -4 = 6 \cdot x \end{array}$$

Löse nun jede einzelne Gleichung. Besitzen diese Gleichungen als Lösung einen einheitlichen Wert für x, so hast du gezeigt, dass die Richtungsvektoren der Geraden linear abhängig sind, andernfalls sind sie nicht linear abhängig.
Lösen der Gleichungen:

$$\begin{array}{lrll} \text{I} & 2 = & -3 \cdot x & \mid :(-3) \\ & x = & -\frac{2}{3} & \\ \text{II} & -6 = & -6 \cdot x & \mid :(-6) \\ & x = & 1 & \\ \text{III} & -4 = & 6 \cdot x & \mid :6 \\ & x = & -\frac{2}{3} & \end{array}$$

Da sich kein einheitlicher Wert für x ergeben hat, hast du gezeigt, dass g und k nicht linear abhängig sind. Sind Geraden nicht linear abhängig, sind diese auch nicht identisch oder parallel.
Nachdem du ermittelt hast, dass die Richtungsvektoren der Geraden g und k nicht linear abhängig sind, überprüfst du, ob diese sich schneiden. Setze dazu die Gleichungen der Geraden g und k gleich und stelle die resultierende wie folgt um:

$$g = k$$

$$\begin{pmatrix}-2\\8\\8\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\-6\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-4\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-3\\-6\\6\end{pmatrix} \qquad \mid -s\cdot\begin{pmatrix}2\\-6\\-4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-2\\8\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-4\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-3\\-6\\6\end{pmatrix} - s\cdot\begin{pmatrix}2\\-6\\-4\end{pmatrix} \qquad \mid -\begin{pmatrix}2\\-4\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-2\\8\\8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-4\\0\end{pmatrix} = t\cdot\begin{pmatrix}-3\\-6\\6\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-2\\6\\4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-4\\12\\8\end{pmatrix} = t\cdot\begin{pmatrix}-3\\-6\\6\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-2\\6\\4\end{pmatrix}$$

Hast du die Gleichung wie oben umgestellt, so ergibt sich dieses überbesetzte Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrl} \text{I} & -4 = & -3\cdot t - 2\cdot s \\ \text{II} & 12 = & -6\cdot t + 6\cdot s \\ \text{III} & 8 = & 6\cdot t + 4\cdot s \end{array}$$

Zum Lösen dieses Gleichungssystems ist es ausreichend die Gleichungen I und II zu betrachten. Verwende die dritte Gleichung lediglich dazu, dein Ergebnis zu überprüfen.

Lösen des Gleichungssystems mit I und II:

$$\begin{array}{lll}
\text{I} & -4 = -3\cdot t - 2\cdot s & \\
\text{II} & 12 = -6\cdot t + 6\cdot s & +3\cdot \text{I} \\ \hline
\text{I} & -4 = -3\cdot t - 2\cdot s & \\
\text{II} & 0 = -15\cdot t & |:(-15) \\ \hline
\text{I} & -4 = -3\cdot t - 2\cdot s & \\
\text{II} & 0 = t & t=0 \text{ in I} \\ \hline
\text{I} & -4 = -3\cdot 0 - 2\cdot s & \\
 & -4 = -2\cdot s & |:(-2) \\
 & 2 = s &
\end{array}$$

Die Lösungen des Gleichungssystems sind: $s = 2$ und $t = 0$.
Überprüfe diese Ergebnisse, indem du diese in die dritte Gleichung des überbestimmten Gleichungssystems einsetzt:

$$\begin{array}{ll}
\text{III} & 8 = 6\cdot t + 4\cdot s \\
 & 8 = 6\cdot 0 + 4\cdot 2 \\
 & 8 = 8
\end{array}$$

Da die Gleichung III für $t = 0$ und $s = 2$ zu einer wahre Aussage wird, sind die berechneten Werte für t und s korrekt.

Die Koordinaten des Schnittpunktes S der Geraden g und k berechnest du jetzt durch Einsetzten von t oder s in die entsprechenden Geradengleichungen.
Hier: t in k

$$S: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Geraden g und k schneiden sich im Aufpunkt der Geraden k.
Die Koordinaten des Schnittpunkts sind:
$S(2\,|-4\,|\,0)$.

(2) ► **Bestimmen weiterer Lagebeziehungen von g und k**

(1) Die Geraden g und k sind windschief:

Sind Geraden windschief, dann sind weder die Richtungsvektoren dieser Geraden linear abhängig, noch schneiden sich diese Geraden.
Der Parameter b bestimmt den Richtungsvektor der Geraden k, im ersten Teil dieser Aufgabe, hast du herausgefunden, dass die Geraden g und k für $b = -6$ linear unabhängig sind. Das heißt, die Parameterbelegung für b kann mit $b = -6$ beibehalten werden, wenn die Geraden windschief sein sollen.

Parameter a bestimmt den Aufpunkt der Geraden k. Diesen passt du nun so an, dass sich g und k nicht mehr schneiden. Stelle dazu das oben bestimmte Gleichungssystem zur Berechnung des Schnittpunkts von g und k wie folgt in Abhängigkeit des Parameters a auf:

$$g = k$$

$$\begin{pmatrix}-2\\8\\8\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2\\-6\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-4\\a\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-3\\-6\\6\end{pmatrix}\qquad \left|\ -s\cdot\begin{pmatrix}2\\-6\\-4\end{pmatrix}\right.$$

$$\begin{pmatrix}-2\\8\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-4\\a\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-3\\-6\\6\end{pmatrix}-s\cdot\begin{pmatrix}2\\-6\\-4\end{pmatrix}\qquad \left|\ -\begin{pmatrix}2\\-4\\a\end{pmatrix}\right.$$

$$\begin{pmatrix}-2\\8\\8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\-4\\a\end{pmatrix}=t\cdot\begin{pmatrix}-3\\-6\\6\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-2\\6\\4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-4\\12\\8-a\end{pmatrix}=t\cdot\begin{pmatrix}-3\\-6\\6\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-2\\6\\4\end{pmatrix}$$

Es ergibt sich dieses von a abhängige Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ll}\text{I} & -4 = -3\cdot t - 2\cdot s\\ \text{II} & 12 = -6\cdot t + 6\cdot s\\ \text{III} & 8-a = 6\cdot t + 4\cdot s\end{array}$$

Da sich die Gleichungen I und II nicht verändert haben, sind die Lösungen $s = 2$ und $t = 0$ immer eine korrekte Lösung des Gleichungssystems. Lediglich die dritte Gleichung hat sich verändert. Diese Gleichung hast du im vorhergegangenen Aufgabenteil dazu verwendet, dein Ergebnis zu überprüfen.
Setze nun die Lösungen des Gleichungssystems in die dritte Gleichung ein und passe den Parameter a so an, dass diese für $s = 2$ und $t = 0$ keine wahre Aussage mehr ist und somit kein Schnittpunkt der Geraden g und k existiert:

$$8-a = 6\cdot 0 + 4\cdot 2$$
$$8-a = 8$$

Hier kannst du leicht erkennen, dass sich die Geraden g und k für alle Werte von $a \neq 0$ nicht schneiden.
Die Geraden g und k sind zum Beispiel für diese Parameterbelegung windschief:
$a \neq 0$ und $b = 6$.

(2) Die Geraden g und k sind identisch:

Damit die Geraden g und k identisch sind, müssen ihre Richtungsvektoren linear abhängig sein und es muss mindestens ein gemeinsamer Punkt der Geraden existieren.
Im ersten Aufgabenteil dieser Aufgabe hast du bereits überprüft, ob die Vektoren der Geraden linear abhängig sind. Um b jetzt so zu bestimmen, dass die Richtungsvektoren von g und k linear abhängig sind, führst du die gleiche Probe (siehe (1)) in Abhängigkeit von b durch:

$$\begin{pmatrix}2\\-6\\4\end{pmatrix}=x\cdot\begin{pmatrix}-3\\b\\6\end{pmatrix}$$

Es ergeben sich diese drei Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 2 = -3 \cdot x \\ \text{II} & -6 = b \cdot x \\ \text{III} & -4 = 6 \cdot x \end{array}$$

Bestimme b nun so, dass das eben bestimmte überbestimmte Gleichungssystem eine einheitlich Lösung für x besitzt. Die Lösung für x der Gleichungen I und II hast du bereits im ersten Aufgabenteil bestimmt, diese war: $x = -\frac{2}{3}$. Setzte diesen Wert für x in die zweite Gleichung des Gleichungssystems ein und löse nach b auf:

$$\begin{array}{lll} \text{II} & -6 = b \cdot (-\frac{2}{3}) & \mid \cdot(-\frac{3}{2}) \\ & 9 = b & \end{array}$$

Damit die Richtungsvektoren von g und k linear abhängig sind, muss b so gewählt werden: $b = 9$.

Nun bestimmst du a so, dass g und k mindestens einen gemeinsamen Punkt besitzen. Der Parameter a legt die Lage des Aufpunkts der Geraden k fest. Bestimme a demnach so, dass der Aufpunkt der Geraden k auf der Geraden g liegt. Führe dazu wie im Aufgabenteil a eine Punktprobe mit diesem Punkt durch:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Es ergeben sich diese Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 2 = -2 + 2 \cdot s \\ \text{II} & -4 = 8 - 6 \cdot s \\ \text{III} & a = 8 - 4 \cdot s \end{array}$$

Da nur die dritte Gleichung von a abhängig ist, bestimmst du mit Hilfe der ersten oder zweiten Gleichung einen Wert für s und setzt diesen dann in III ein und berechnest damit den Wert für a, für welchen der Aufpunkt von k auf der Geraden g liegt:

$$\begin{array}{lll} \text{I} & 2 = -2 + 2 \cdot s & \mid +2 \\ & 4 = 2 \cdot s & \mid : 2 \\ & 2 = s & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{II} & -4 = 8 - 6 \cdot s & \mid -8 \\ & -12 = -6 \cdot s & \mid : (-6) \\ & 2 = s & \end{array}$$

$s = 2$ in Gleichung III:

$$\begin{array}{ll} \text{III} & a = 8 - 4 \cdot 2 \\ & a = 8 - 8 \\ & a = 0 \end{array}$$

Damit die Geraden g und k identisch sind, muss diese Parameterbelegung gewählt werden:

$a = 0$ und $b = 9$.

(3) Die Geraden g und k sind echt parallel

Damit die Geraden g und k echt parallel sind, müssen die Richtungsvektoren dieser Geraden linear abhängig sein. Des weiteren dürfen diese Geraden keinen gemeinsamen Punkt besitzten.
Im Punkt (2) hast du bestimmt, dass die Richtungsvektoren der Geraden g und k für $b = 9$ linear abhängig sind. Das heißt, es muss $b = 9$ gelten, damit die Geraden parallel sind

Um nun a so zu bestimmen, dass die Geraden g und k keine gemeinsamen Punkt besitzten, setzt du diese Geradengleichungen in Abhängigkeit von a und mit $b = 9$ gleich:

$$g = k$$

$$\begin{pmatrix}-2\\8\\8\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\-6\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-4\\a\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-3\\9\\6\end{pmatrix} \quad \left|\ -s\cdot\begin{pmatrix}2\\-6\\-4\end{pmatrix}\right.$$

$$\begin{pmatrix}-2\\8\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-4\\a\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-3\\9\\6\end{pmatrix} - s\cdot\begin{pmatrix}2\\-6\\-4\end{pmatrix} \quad \left|\ -\begin{pmatrix}2\\-4\\a\end{pmatrix}\right.$$

$$\begin{pmatrix}-2\\8\\8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-4\\a\end{pmatrix} = t\cdot\begin{pmatrix}-3\\9\\6\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-2\\6\\4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-4\\12\\8-a\end{pmatrix} = t\cdot\begin{pmatrix}-3\\9\\6\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-2\\6\\4\end{pmatrix}$$

Es ergibt sich dieses von a abhängige lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & -4 = -3\cdot t - 2\cdot s \\ \text{II} & 12 = 9\cdot t + 6\cdot s \\ \text{III} & 8 - a = 6\cdot t + 4\cdot s \end{array}$$

Bestimme mit Hilfe der Gleichungen I und II wie oben eine Lösung des Gleichungssystems:

$$\begin{array}{lll} \text{I} & -4 = -3\cdot t - 2\cdot s & \\ \text{II} & 12 = 9\cdot t + 6\cdot s & +3\cdot\text{I} \\ \hline \text{I} & -4 = -3\cdot t - 2\cdot s & \\ \text{II} & 0 = -18\cdot t & \mid :(-18) \\ \hline \text{I} & -4 = -3\cdot t - 2\cdot s & \\ \text{II} & 0 = t & t = 0 \text{ in I} \\ \hline \text{I} & -4 = -3\cdot 0 - 2\cdot s & \\ & -4 = -2\cdot s & \mid :(-2) \\ & 2 = s & \end{array}$$

Setzte nun $s = 2$ und $t = 0$ in III ein und bestimme a so, dass diese Gleichung für die berechneten Lösungen zu einem Widerspruch wird, damit sich g und k nicht schneiden:

$$\begin{array}{ll} \text{III} & 8 - a = 6\cdot 0 + 4\cdot 2 \\ & 8 - a = 8 \end{array}$$

Es ist auch hier leicht zu erkennen, dass diese Gleichung für jeden Wert von $a \neq 0$ zum Widerspruch wird.
Damit g und k echt parallel sind, müssen a und b so gewählt werden:

$a \neq 0$ und $b = 9$.

c) ► **Erklären der einzelnen Schritte und Berechnen der Zwischenergebnisse** (10 BE)

Erklären der Gleichung I:
Die erste Gleichung sagt aus, dass der Punkt D auf der Geraden g liegt, denn der Ortsvektor $\overrightarrow{d}$ von D erfüllt die Geradengleichung.

Erklären der Gleichung II:
Die linke Seite der zweiten Gleichung sagt aus, dass der Richtungsvektor von g senkrecht auf dem Vektor zwischen Punkt P und D liegt, denn das Skalarprodukt der beiden Vektoren ist null.
Der mittlere Teil der Gleichung zeigt, dass sich der Vektor $\overrightarrow{PD}$ aus der Differenz der jeweiligen Richtungsvektoren von P und D ergibt.
Geometrisch bedeutet diese Gleichung, dass D der Fußpunkt des Lotes von P auf die Gerade g sein muss, da der Punkt D nach I auf der Geraden g liegt.

Die gesuchten Koordinaten von D berechnest du, indem du den Ortsvektor von P und den Ortsvektor von D (Gerade g) in Gleichung II einsetzt und diese Gleichung nach s auflöst:

$$\begin{aligned}
\left(\begin{pmatrix}-2\\8\\8\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\-6\\-4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}\right)\circ\begin{pmatrix}2\\-6\\-4\end{pmatrix} &= 0 \\
\left(\begin{pmatrix}-4\\6\\10\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\-6\\-4\end{pmatrix}\right)\circ\begin{pmatrix}2\\-6\\-4\end{pmatrix} &= 0 && \text{Zusammenfassen der Vektoren} \\
\begin{pmatrix}-4+2\cdot s\\6-6\cdot s\\10-4\cdot s\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}2\\-6\\-4\end{pmatrix} &= 0 && \text{Skalarprodukt der Vektoren in Abh. von } a \\
(-4+2\cdot s)\cdot 2+(6-6\cdot s)\cdot(-6)+(10-4\cdot s)\cdot(-4) &= 0 \\
-8+4\cdot s-36+36\cdot s-40+16\cdot s &= 0 \\
-84+56\cdot s &= 0 && \mid +84 \\
56\cdot s &= 84 && \mid :56 \\
s &= 1,5
\end{aligned}$$

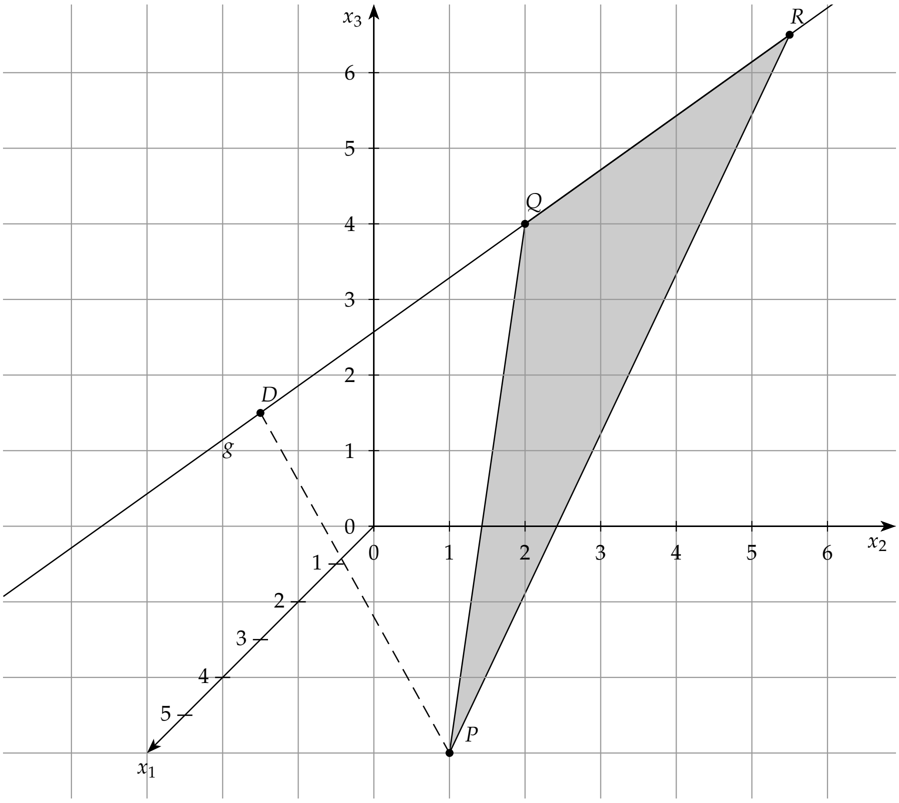
Die Koordinaten von D berechnest du nun, indem du das bestimmte s, welches gleichzeitig ein gesuchtes Zwischenergebnis ist, in Gleichung I einsetzt:

$$\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix}-2\\8\\8\end{pmatrix} + 1,5\cdot\begin{pmatrix}2\\-6\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\8\\8\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\-9\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

Die Koordinaten von D sind: $D(1\,|-1\,|\,2)$.

Die in 3. angegebene Gleichung erinnert an die Formel zur Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks. Die Formel zur Berechnung des Flächeninhalts eines allgemeinen Dreiecks ist:
$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$

Die Strecke $\overline{QR}$ liegt auf der Geraden g, während $\overline{PD}$ senkrecht auf dieser Geraden steht. Für das Dreieck bedeutet das, dass $\overline{QR}$ dessen Grundseite g und $\overline{PD}$ die zugehörigen Höhe h des Dreiecks ist. Zeichne das Dreieck, indem du die Punkte P, Q und R verbindest:



Der Flächeninhalt A des gezeichneten Dreiecks berechnest du über die Hälfte des Produkts der Beträge der Vektoren $\overrightarrow{PD}$ und $\overrightarrow{QR}$:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right|$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right|$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + 4^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 2^2}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 + 9 + 16} \cdot \sqrt{1 + 9 + 4}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{26} \cdot \sqrt{14}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 5{,}1 \cdot 3{,}74$$

$$A = 9{,}54$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks PQR ist $A \approx 9{,}54$ FE.