Aufgabe 1

(4VP)

a) ► **Parallelität nachweisen**

Eine Ebene und eine Gerade sind parallel, wenn der **Richtungsvektor** der Geraden und der **Normalenvektor** der Ebene **senkrecht** aufeinander stehen und wenn sie **nicht** identisch sind.

Aus der Koordinatengleichung der Ebene E folgt der Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Die Gerade g hat den Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Die beiden Vektoren sind orthogonal, wenn ihr **Skalarprodukt** Null ergibt:

$\vec{n} \circ \vec{u} = 1 \cdot 6 + (-3) \cdot 2 + 2 \cdot 0 = 6 - 6 = 0$

Die Gerade g und die Ebene E verlaufen parallel, aber nicht notwendigerweise **echt** parallel: Prüfe, ob der Stützvektor der Geraden g in der Ebene E liegt:

$(2 \mid 2 \mid -1)$ in E: $2 - 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) - 6 = 2 - 6 - 2 - 6 = -6 - 6 = -12 \neq 0$

Der Stützvektor von g liegt nicht in E. g und E verlaufen **echt** parallel.

b) ► **Abstand bestimmen**

Da g und E parallel verlaufen, sind sie in jedem Punkt gleich weit voneinander entfernt. Wähle also einen beliebigen Punkt, der auf g liegt, z.B. den Punkt $P(2 \mid 2 \mid -1)$. Der Abstand von g zu E ist gleich dem Abstand von Punkt P zu E.

Den Abstand eines Punktes von einer Ebene kannst du über die **Hessesche Normalenform** berechnen:

$$E_{HNF}: d(P;E) = \frac{|x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 6|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2}} = \frac{|x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 6|}{\sqrt{14}}$$

Setze nun die Koordinaten von P ein und berechne so den Abstand von g zu E:

$$\begin{aligned} d(g;E) = d(P;E) &= \frac{|2 - 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) - 6|}{\sqrt{14}} \\ &= \frac{|2 - 6 - 2 - 6|}{\sqrt{14}} \\ &= \frac{|-12|}{\sqrt{14}} \\ &= \frac{12}{\sqrt{14}} \approx 3{,}207 \end{aligned}$$

Aufgabe 2

(3VP)

► **Lage von Punkt D nachweisen**

Bestimme im ersten Schritt eine Gleichung der Ebene E. Zeige anschließend durch Punktprobe, dass D diese Ebenengleichung nicht erfüllt.

$$E: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC} \qquad (r, s \in \mathbb{R})$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 & - & 2 \\ 3 & - & 0 \\ 0 & - & 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 & - & 2 \\ 0 & - & 0 \\ 4 & - & 0 \end{pmatrix}$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

D in E:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \Rightarrow & r = \frac{2}{3} \\ \Rightarrow & s = \frac{1{,}5}{4} = \frac{3}{8} \end{matrix}$$

Setze $r = \frac{2}{3}$ und $s = \frac{3}{8}$ ein in Zeile (1):

$$3 = 2 - 2 \cdot \frac{2}{3} - 2 \cdot \frac{3}{8}$$

$$3 = 2 - \frac{4}{3} - \frac{3}{4}$$

$$3 = \frac{24}{12} - \frac{16}{12} - \frac{9}{12}$$

$$3 = -\frac{1}{12}$$

Dies ist eine **falsche Aussage**. D liegt nicht in E.

▸ Orthogonalität nachweisen

Eine Gerade und eine Ebene verlaufen orthogonal, wenn der Normalenvektor der Ebene und der Richtungsvektor der Geraden **parallel** verlaufen. Bestimme im ersten Schritt eine Gleichung der Geraden g und den Normalenvektor der Ebene E. Vergleiche diese Vektoren anschließend.

1. Schritt: Geradengleichung und Normalenvektor bestimmen

Die Gerade g verläuft durch den Koordinatenursprung und durch den Punkt D. Für ihre Gleichung gilt damit:

$$g: \vec{x} = \overrightarrow{OO} + t \cdot \overrightarrow{OD} = t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Den Normalenvektor der Ebene E erhältst du über das Kreuzprodukt der Richtungsvektoren:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 4 & - & 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot (-2) & - & (-2) \cdot 4 \\ (-2) \cdot 0 & - & 3 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

2. Schritt: Vektoren vergleichen

Zwei Vektoren $\vec{n}$ und $\vec{u}$ sind parallel, wenn es ein $k \in \mathbb{R}$ gibt, mit $\vec{n} = k \cdot \vec{u}$:

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \Rightarrow & k = \frac{12}{3} = 4 \\ \Rightarrow & k = \frac{8}{2} = 4 \\ \Rightarrow & k = \frac{6}{1{,}5} = 4 \end{matrix}$$

$\vec{n}$ und $\vec{u}$ sind parallel. Damit sind g und E orthogonal.

Aufgabe 3 (3VP)

▶ Linear abhängige Vektoren

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind linear abhängig, falls es eine reelle Zahl k gibt, sodass gilt:
$\vec{a} = k \cdot \vec{b}$.

Die Vektoren müssen also **Vielfache** voneinander sein.

Betrachte die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Die erste Zeile verrät uns: bei richtiger Wahl von p und q ist Vektor $\vec{b}$ das **-3fache** von Vektor $\vec{a}$. In Formeln:
$\vec{b} = -3 \cdot \vec{a}$.

Für p und q folgt dann: $p = -3 \cdot 1 = -3$ und $q = -3 \cdot 2 = -6$.

Die Vektoren sind linear abhängig für $p = -3$ und $q = -6$.

▶ Orthogonale Vektoren

Zwei Vektoren sind orthogonal, wenn ihr **Skalarprodukt** den Wert Null annimmt. Damit $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal sind, muss also gelten:
$\vec{a} \circ \vec{b} = 0$.

Setze die Vektoren ein und vereinfache:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -9 \\ p \\ q \end{pmatrix} &= 0 \\ 3 \cdot (-9) + 1 \cdot p + 2 \cdot q &= 0 \\ -27 + p + 2q &= 0 \end{aligned}$$

Du kannst erkennen, dass diese Gleichung **unendlich viele** Lösungen besitzt. Mögliche Lösungen ergeben sich durch **systematisches Probieren**:

$p = 7 \quad \text{und} \quad q = 10$, denn $-27 + 7 + 2 \cdot 10 = -27 + 7 + 20 = -27 + 27 = 0$

$p = 17 \quad \text{und} \quad q = 5$, denn $-27 + 17 + 2 \cdot 5 = -27 + 17 + 10 = -27 + 27 = 0$

$p = 27 \quad \text{und} \quad q = 0$, denn $-27 + 27 + 2 \cdot 0 = -27 + 27 = 0$

Auch weitere Lösungen sind möglich.

Aufgabe 4 (3VP)

a) **▶ Parallelität nachweisen**

Eine Gerade und eine Ebene sind parallel, wenn

- der Richtungsvektor der Geraden und der Normalenvektor der Ebene orthogonal sind **und**
- die Gerade nicht in der Ebene liegt

Prüfe beide Bedingungen:

1. Schritt: Orthogonalität der Vektoren prüfen

Zwei Vektoren sind orthogonal, wenn ihr Skalarprodukt Null ergibt:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = 4 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 + 1 \cdot (-4) = 8 - 4 - 4 = 0$$

Richtungsvektor und Normalenvektor sind orthogonal.

2. Schritt: Lage der Geraden prüfen

Es gibt zwei Möglichkeiten: Entweder **alle** Punkte der Geraden g liegen in der Ebene E, oder **keiner**. Der Punkt $(5 \mid 5 \mid 2)$ liegt auf der Geraden g. Prüfe, ob er auch in der Ebene E liegt:

$$\begin{aligned}
\left[\begin{pmatrix}5\\5\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix} &= 0\\
\begin{pmatrix}4\\2\\4\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix} &= 0\\
4\cdot 4 + 2\cdot(-1) + 4\cdot 1 &= 0\\
16 - 2 + 4 &= 0\\
18 &= 0\text{: Falsche Aussage}
\end{aligned}$$

Der Punkt $(5 \mid 5 \mid 2)$ liegt nicht in der Ebene E, also liegt auch die Gerade g nicht in der Ebene E. g und E sind deshalb echt parallel.

b) ► **Abstand berechnen**

Da g und E parallel sind, ist der Abstand zwischen ihnen in jedem Punkt gleich. Es genügt also, wenn du einen Punkt der Geraden g auswählst und seinen Abstand zur Ebene E berechnest.

Wir wählen wieder den Punkt $(5 \mid 5 \mid 2)$. Bestimme zur Abstandsberechnung zunächst die **Hesse-Normalenform** der Ebene E:

$$\begin{aligned}
E_{\text{HNF}} := \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{|\vec{n}|} &= d(P;E)\\
= \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{4^2+(-1)^2+1^2}} &= d(P;E)\\
= \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{18}} &= d(P;E)
\end{aligned}$$

Setze nun den Punkt $(5 \mid 5 \mid 2)$ ein und berechne den Abstand:

$$\begin{aligned}
d(g;E) &= \left[\begin{pmatrix}5\\5\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{18}}\\
&= \begin{pmatrix}4\\2\\4\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{18}}\\
&= (4\cdot 4 + 2\cdot(-1) + 4\cdot 1)\cdot \frac{1}{\sqrt{18}}\\
&= (16 - 2 + 4)\cdot \frac{1}{\sqrt{18}}\\
&= \frac{18}{\sqrt{18}}\\
d(g;E) &= \sqrt{18}
\end{aligned}$$

Die Gerade g ist $\sqrt{18}$ LE von der Ebene E entfernt.