a) (1) ► **Bestimmen des Mittelpunkts M und des Radius R der Kugel K** (9P)

Laut Aufgabenstellung besitzt Kugel K folgende Gleichung in Koordinatenform:
$K : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 20 \cdot x_1 - 20 \cdot x_2 - 48 \cdot x_3 + 632 = 0.$
Deine Aufgabe ist es nun, mit Hilfe dieser Gleichung für Kugel K deren Mittelpunkt M und Radius R zu ermitteln. Um Mittelpunkt M und Radius R von K bestimmen zu können, solltest du die angegebene Gleichung für Kugel K von der gegebenen Form in die allgemeine Koordinatenform für eine Kugelgleichung umformen. Die allgemeine Koordinatenform einer Kugelgleichung hat dabei folgende Gestalt:
$K : (x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = R^2$ mit:

- m_1, m_2 und m_3: Koordinaten des Kugelmittelpunkts M der Kugel K.
- R: Radius der Kugel K.

Folgende Bestandteile der allgemeinen Kugelgleichung in Koordinatenform entsprechen der zweiten binomischen Formel:
$(x_1 - m_1)^2$; $(x_2 - m_2)^2$ und $(x_3 - m_3)^2$.
Willst du also die angegebene Kugelgleichung für Kugel K in die allgemeine Koordinatenform überführen, so geschieht dies über geschickte quadratische Ergänzungen so, dass die dafür notwendigen Binome gebildet werden können. Hast du die notwendigen Binome gebildet, so kannst du Koordinaten des Kugelmittelpunkts M und den Radius R der Kugel K der entstandenen Kugelgleichung in Koordinatenform entnehmen.

Bestimmen des Mittelpunkts M und des Radius R über die Kugelgleichung von E:

Bevor du damit anfängst, die Kugelgleichung von Kugel K umzuformen, ist es hilfreich, wenn du diese zunächst wie folgt ordnest:

$K : x_1^2 - 20 \cdot x_1 + x_2 - 20 \cdot x_2 + x_3 - 48 \cdot x_3 + 632 = 0.$

Betrachte nun nacheinander die verschiedenen Variablen in der Kugelgleichung:

Variable x_1:
Die von x_1 abhängigen Bestandteile der Kugelgleichung von K sind: $x_1^2 - 20 \cdot x_1$. Nun gilt es, den Term so zu ergänzen, damit dieser in die zweite binomische Formel umgeformt werden kann. Die allgemeine Form der zweiten binomischen Formel ist:
$(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2.$
Das heißt, bei dem von uns betrachteten Term entspricht a der Variablen x_1, was für b bedeutet:
$2 \cdot a \cdot b = 20 \cdot x_1 \;\Leftrightarrow\; b = 10.$
Ergänze also den obigen Term um $b^2 = 100$ und subtrahiere gleichzeitig von diesem 100, damit die Äquivalenz des Terms gewährleistet bleibt:

$x_1^2 - 20 \cdot x_1 + 100 - 100 = (x_1 - 10)^2 - 100.$

Variable x_2:

Verfahre wie oben: $x_2^2 - 20 \cdot x_2 + 100 - 100 = (x_2 - 10)^2 - 100.$

Variable x_3:

$x_3^2 - 48 \cdot x_3 + 576 - 576 = (x_3 - 24)^2 - 576.$

Setzte die umgeformten Terme nun in die Kugelgleichung von K in Koordinatenform ein:

$$\begin{aligned} K\ (x_1-10)^2-100+(x_2-10)^2-100+(x_3-24)^2-576+632 &= 0 \\ (x_1-10)^2+(x_2-10)^2+(x_3-24)^2-144 &= 0 \qquad \mid +144 \\ (x_1-10)^2+(x_2-10)^2+(x_3-24)^2 &= 144 \end{aligned}$$

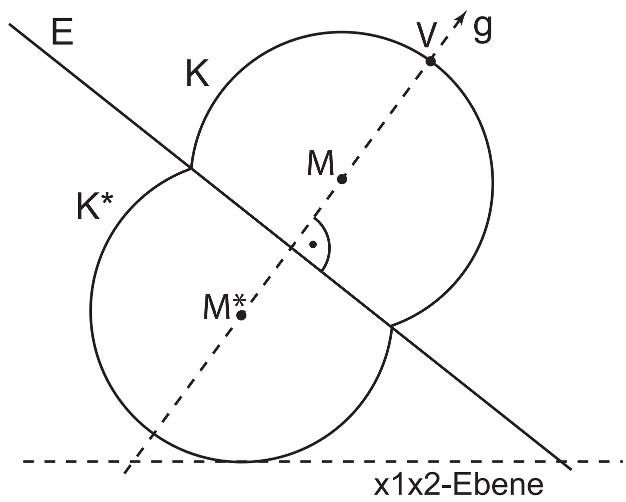
$\Longrightarrow$Der Kugelmittelpunkt M der Kugel K hat die Koordinaten $M(10\,|\,10\,|\,24)$ und der Radius R ist $R=\sqrt{144}=12$.

(2) ► **Berechnen der Koordinaten des Ventilpunkts V**

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass der Hüpfball schräg auf dem Fußboden, repräsentiert durch die x_1x_2-Ebene, liegt. Das Ventil, beschrieben durch den unbekannten Punkt V, welches dazu benutzt wird den oberen Ball des Hüpfballs aufzupumpen, liegt im **oberen** Schnittpunkt der Achse durch die Ballmittelpunkte mit der Kugel K. Die Achse, auf welcher die Ballmittelpunkte und der Ventilpunkt V liegen, fungiert hier als Symmetrieachse des Hüpfballs. Deine Aufgabe ist es nun, die Koordinaten des Ventilpunkts V zu berechnen.

Der Aufgabenstellung kannst du weiterhin entnehmen, dass die untere Kugel K^* durch Spiegelung der oberen Kugel K an der Ebenen E, gegeben in Parameterform, entsteht. Das bedeutet, dass die oben beschriebene Symmetrieachse senkrecht zur Ebenen E verläuft.

Da die Symmetrieachse, auf welcher die Ballmittelpunkte M und M^* und der Ventilpunkt V liegen, senkrecht zur Ebenen E verläuft, besitzt diese gerade die Richtung des Normalenvektors $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene E. Willst du nun die Koordinaten des Ventilpunkts V berechnen, so bestimmst du zunächst eine Gerade g, welche durch den bekannten Mittelpunkt M der oberen Kugel K verläuft und die Richtung des Normalenvektors $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene E besitzt. Hast du diese Gerade g bestimmt, so berechnest du im nächsten Schritt die Schnittpunkte von g und K und bestimmst so den unbekannten Ventilpunkt V.



Gehe also Schrittweise vor:

1. Schritt: Bestimmen des Normalenvektors der Ebene E
2. Schritt: Ermitteln einer Geradengleichung von g
3. Schritt: Schneiden der Geraden g mit der Kugel K

1. Schritt:

Beim Bestimmen des Normalenvektors $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene E gibt es zwei Möglichkeiten. Zum einen lässt sich der Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ über das Vektorprodukt und zum anderen über das Skalarprodukt bestimmen. Um den Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene E über eine der genannten Möglichkeiten bestimmen zu können, benötigst du zwei Richtungsvektoren der Ebene E. Verwende hier die Vektoren aus der Ebenengleichung für E in Parameterform (siehe Aufgabenstellung):

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

►► Möglichkeit A: Bestimmen von $\overrightarrow{n_E}$ über das Vektorprodukt

Bilde zum Bestimmen des Normalenvektors $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene E das Vektorprodukt der Richtungsvektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ der Ebene E:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-5) & - & (-1) \cdot 1 \\ -1 \cdot 4 & - & 0 \cdot (-5) \\ 0 \cdot 1 & - & 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Da bei Vektoren nicht die Länge, sondern die Richtung entscheidend ist, ist folgende Umformung von $\overrightarrow{n_E}$ zulässig:

$$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} \widehat{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

►► Möglichkeit B: Bestimmen von $\overrightarrow{n_E}$ über das Skalarprodukt

Der Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ steht senkrecht auf der Ebene E und so auch senkrecht auf jedem der beiden Richtungsvektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$. Deshalb muss auch das Skalarprodukt des Normalenvektors $\overrightarrow{n_E}$ mit jedem der beiden Richtungsvektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ Null ergeben. Bilde das Skalarprodukt des von n_1, n_2 und n_3 abhängigen Normalenvektors $\overrightarrow{n_E}$ mit den Richtungsvektoren der Ebene E. Setze anschließend die von dir berechneten Skalarprodukte gleich Null und löse das so entstehende unterbesetzte Gleichungssystem.

Skalarprodukt von $\overrightarrow{n_E}$ mit Richtungsvektor $\overrightarrow{a}$: $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = n_2 - n_3 \overset{!}{=} 0.$

Skalarprodukt von $\overrightarrow{n_E}$ Richtungsvektor $\overrightarrow{b}$: $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = 4 \cdot n_1 + n_2 - 5 \cdot n_3 \overset{!}{=} 0.$

Resultierendes unterbesetztes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & n_2 - n_3 = 0 \\ \text{II} & n_1 + n_2 - 5 \cdot n_3 = 0 \end{array}$$

Setze zum Lösen des Gleichungssystems $n_3 = t$:

$$\begin{array}{lrl}
\text{I} & n_2 - t = 0 & \mid +t \\
\text{II} & 4 \cdot n_1 + n_2 - 5 \cdot t = 0 & \\
\hline
\text{Ia} & n_2 = t & \\
\text{II} & 4 \cdot n_1 + n_2 - 5 \cdot t = 0 & n_2 = t \text{ in II} \\
\hline
\text{Ia} & n_2 = t & \\
\text{IIa} & 4 \cdot n_1 + t - 5 \cdot t = 0 & \\
 & 4 \cdot n_1 - 4 \cdot t = 0 & \mid +4 \cdot t \\
 & 4 \cdot n_1 = 4 \cdot t \;\Leftrightarrow\; n_1 = t &
\end{array}$$

Da beim Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ hier nur die Richtung und nicht die Länge entscheidend ist, ergibt sich dieser für $t = 1$ zu:

$$\overrightarrow{n_E} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \widehat{=} 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Schritt:

Gerade g, welche die Symmetrieachse des Hüpfballs beschreibt, besitzt als Stützvektor den Ortsvektor $\overrightarrow{OM}$ des Kugelmittelpunkts M der Kugel K und den Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene E als Richtungsvektor:

$$g: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OM} + s \cdot \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 24 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Schritt:

Forme Gerade g in einen von s abhängigen Vektor $\overrightarrow{x_g}$ um und setze die Einträge dieses Vektors $\overrightarrow{x_g}$ für x_1, x_2 und x_3 in die Koordinatengleichung der Kugel K ein; diese hast du im vorherigen Aufgabenteil dieser Aufgabe bestimmt. Bestimme dann den Schnittpunkt V von K und g wie folgt:

$$g: \overrightarrow{x_g} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 24 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10+s \\ 10+s \\ 24+s \end{pmatrix} \text{ in } K:$$

$$\begin{aligned}
(10+s-10)^2 + (10+s-10)^2 + (24+s-24)^2 &= 144 \\
s^2 + s^2 + s^2 &= 144 \\
3 \cdot s^2 &= 144 \qquad \mid :3 \\
s^2 &= 48 \qquad \mid \sqrt{} \\
s_1 &= \sqrt{3 \cdot 16} = 4 \cdot \sqrt{3} \\
s_2 &= -\sqrt{3 \cdot 16} = -4 \cdot \sqrt{3}
\end{aligned}$$

Als Lösung dieser Gleichung erhältst du $s_1 = 4 \cdot \sqrt{3}$ und $s_2 = -4 \cdot \sqrt{3}$. Da der Ventilpunkt V auf dem oberen Teil der Symmetrieachse, beschrieben durch Gerade g, liegt, lässt sich dieser nur mit dem positiven der beiden bestimmten Parameterwerte s_1 und s_2 berechnen. Setze also $s_1 = 4 \cdot \sqrt{3}$ für Parameter s in die Geradengleichung von g ein, um den Ortsvektor $\overrightarrow{OV}$ des Ventilpunkts V zu berechnen:

$$\overrightarrow{OV} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 24 \end{pmatrix} + 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 16,93 \\ 16,93 \\ 30,93 \end{pmatrix}.$$

$\Longrightarrow$ Das Ventil der oberen Kugel K befindet sich im Punkt $V(16,93 \,|\, 16,93 \,|\, 30,93)$.

(3) ▶ **Bestimmen des Winkels α, den die Symmetrieachse mit der x_1x_2 - Ebene einschließt**

Deine Aufgabe ist es jetzt, den Winkel α zu berechnen, welche die Symmetrieachse, beschrieben durch die Gerade g, mit der x_1x_2 - Ebene einschließt. Das heißt, hier gilt es also einen Winkel α zwischen einer Ebenen und einer Geraden zu berechnen, was über folgende Formel erreicht werden kann:

$\sin(\alpha) = \dfrac{|\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{n}|}$ mit

- $\overrightarrow{u}$: Richtungsvektor der betrachteten Geraden, hier also Richtungsvektor der Geraden g.
- $\overrightarrow{n}$: Normalenvektor der betrachteten Ebene, hier also Normalenvektor der x_1x_2-Ebenen.

Bevor du also den Winkel α berechnen kannst, benötigst du den Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ der x_1x_2-Ebene. Jeder Punkt, welcher in der x_1x_2-Ebene liegt, hat eine x_3-Koordinate von Null, die Ebenengleichung der x_1x_2-Ebene in Koordinatenform ist also:
$x_3 = 0.$

Aus dieser Ebenengleichung der x_1x_2-Ebene in Koordinatenform kannst du direkt den Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ der x_1x_2-Ebene entnehmen, dieser ist:

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen des Winkels α:

Setze nun Richtungsvektor der Geraden g und Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ der x_1x_2-Ebene in die oben gezeigte Formel ein, um den gesuchten Winkel zu berechnen:

$$\sin(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|(1 \cdot 0) + (1 \cdot 0) + (1 \cdot 1)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot 1} \Rightarrow \alpha = 35,26^\circ$$

$\Longrightarrow$ Die Symmetrieachse schließt einen Winkel von 35,26 $^\circ$ mit der x_1x_2-Ebene ein.

b) (1) ► **Zeigen, dass Kugel K und Ebene E sich schneiden** (11P)

Betrachtet werden nun Kugel K und Ebene E, wobei gezeigt werden soll, dass diese sich schneiden. Kugel K mit Radius $R = 12$ und Mittelpunkt $M(10\,|\,10\,|\,24)$ besitzt folgende Kugelgleichung in Koordinatenform (siehe a):
$K: (x_1 - 10)^2 + (x_2 - 10)^2 + (x_3 - 24)^2 = 12^2$.

Ebene E ist laut Aufgabenstellung wie folgt definiert:

$$E: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 20 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Im Aufgabenteil a hast du den Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene E bestimmt, dieser war:

$$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Beim Lösen dieser Aufgabe ist es weiterhin sinnvoll, zunächst eine Ebenengleichung der Ebenen E in Koordinatenform zu ermitteln. Die Koordinatenform einer Ebenengleichung lautet allgemein:

$E: n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = d$ mit:

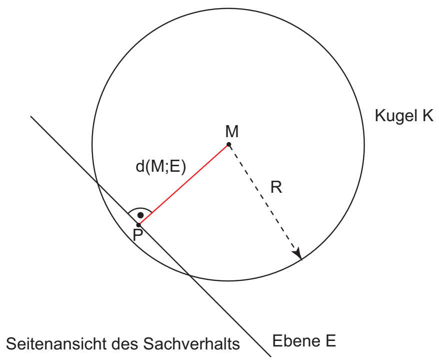
- n_1, n_2 und n_3: Einträge des Normalenvektors $\overrightarrow{n_E}$ der Ebenen E.
- d: Über Punktprobe zu bestimmende Konstante.

Setze also den Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ für n_1, n_2 und n_3 in die Ebenengleichung von E in Koordinatenform ein und bestimme mit einem Punkt, von dem bekannt ist, dass dieser in Ebene E liegt, anschließend Konstante d. Hier wird beispielsweise der Stützvektor aus der Ebenengleichung der Ebenen E in Parameterform (siehe oben) dazu verwendet, um Konstante d zu bestimmen:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= d && \text{mit } x_1 = 2,\ x_2 = 4 \text{ und } x_3 = 20 \\ 2 + 4 + 20 &= d \quad \Leftrightarrow \quad d = 26 \end{aligned}$$

Eine Ebenengleichung der Ebenen E in Koordinatenform ist also: $E:\ x_1 + x_2 + x_3 = 26$

Zeige zunächst, dass Ebene E und Kugel K sich schneiden. Ob Kugel K und Ebene E sich schneiden, wird dabei festgelegt über den Abstand $d(M;E)$. Ist dieser Abstand zwischen Mittelpunkt M der Kugel K und einem bestimmten Punkt P, welcher in Ebene E liegt, kleiner als der Radius R von K, so schneiden sich Kugel K und Ebene E (siehe Rechts). Hier gilt es also zunächst einen Abstand zwischen einem Punkt und einer Ebene zu bestimmen.



Dabei gibt es zwei verschiedene Wege, den gesuchten Abstand $d(M;E)$ zu berechnen. Im Folgenden werden beide ausführlich behandelt:

►► Lösungsweg A: Hessesche Normalform

Mit der Hesseschen Normalform ist es möglich, den Abstand zwischen Punkten und Ebenen zu berechnen. Die Hessesche Normalform lautet:

$$\left|\frac{n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 - e}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}\right| = d(E;P) \text{ mit:}$$

- n_1, n_2 und n_3: Einträge des Normalenvektors der betrachteten Ebene.
- e: Konstante der Ebenengleichung der betrachteten Ebene in Koordinatenform.
- x_1, x_2 und x_3: Koordinaten des Punktes, zu welchem der Abstand bestimmt werden soll.
- $d(E;P)$: Abstand zwischen Punkt und betrachteter Ebene.

Mit der Hesseschen Normalform bist du also in der Lage, den Abstand zwischen einem Punkt und einer Ebene zu berechnen. Schneiden sich Kugel K und Ebene E, so ist der Abstand $d(M;E)$ zwischen der Ebene E und Mittelpunkt M der Kugel K kleiner als der Radius r von Kugel K. Das heißt:
Ist der Abstand $d(M;E)$ zwischen Ebene E und Mittelpunkt M der Kugel K kleiner als $R = 12$ Längeneinheiten, so schneiden sich diese.

Berechne also über die Hessesche Normalform zunächst den Abstand $d(M;E)$ zwischen Mittelpunkt M mit $M(10\,|\,10\,|\,24)$ der Kugel K und der Ebenen E_{ABT}:

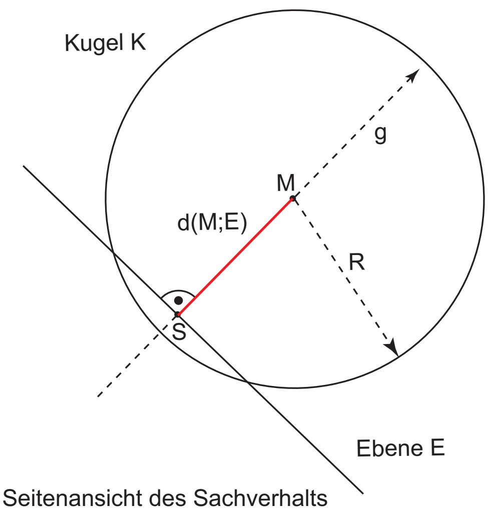
$$\left|\frac{n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 - e}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}\right| = \left|\frac{1 \cdot 10 + 10 \cdot 10 + 1 \cdot 24 - 26}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}}\right| \approx \left|\frac{18}{\sqrt{3}}\right| \approx 10,39 = d(M;E)$$

$\Longrightarrow$ Da der Abstand zwischen Ebene E und Mittelpunkt M der Kugel K mit $d \approx 10,39$ LE kleiner als der Radius R der Kugel K ist, wurde gezeigt, dass sich Ebene E und Kugel K schneiden.

►► Lösungsweg B: Berechnen des Abstands zwischen *E* und *K* mit einer Geraden

Auch hier gilt wieder:
Ist der Abstand zwischen dem Mittelpunkt M der Kugel K und der Ebenen E kleiner als der Radius R der Kugel K, so schneiden sich Kugel K und Ebene E.

Willst du nun den Abstand zwischen Mittelpunkt M und der Ebenen E mit einer Geraden bestimmen, so definierst du im ersten Schritt eine Gerade. Diese Gerade besitzt Mittelpunkt M der Kugel K als Stützvektor und Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ der Ebenen E als Richtungsvektor, sie entspricht also einer Lotgeraden der Ebene E (**Gerade g aus vorherigem Aufgabenteil**). Beim Berechnen des Abstands d zwischen Ebene E und Kugel K über Gerade g, bestimmst du zunächst den Schnittpunkt S dieser Geraden g und der Ebenen E, den sogenannten **Lotfußpunkt.**



Seitenansicht des Sachverhalts

Im nächsten Schritt berechnest du dann den Abstand d zwischen Lotfußpunkt S und Mittelpunkt M von K über den Betrag des zugehörigen Vektors.

1. Schritt: Bestimmen des Lotfußpunkts S von g und E_{ABT}

Wie oben bereits erwähnt, hast du die Geradengleichung von Gerade g bereits im vorherigen Aufgabenteil bestimmt. Forme die Geradengleichung von Gerade g nun als einen von Parameter s abhängigen Vektor um und setze diesen in die Koordinatengleichung von E ein, um den Schnittpunkt S der Geraden g und der Ebenen E (Lotfußpunkt) zu bestimmen:

$$g: \overrightarrow{x_g} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 24 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10+s \\ 10+s \\ 24+s \end{pmatrix} \text{ in } E:$$

$$\begin{aligned} (10+s)+(10+s)+(24+s) &= 26 \\ 44 + 3\cdot s &= 26 \qquad \mid -44 \\ 3\cdot s &= -18 \qquad \mid :3 \\ s &= -6 \end{aligned}$$

Willst du nun die Koordinaten von Schnittpunkt S berechnen, so setzt du $s = -6$ in die oben aufgestellte Geradengleichung der Geraden g ein:

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 24 \end{pmatrix} - 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten des Lotfußpunkts S sind: $S(4\,|\,4\,|\,18)$.

2. Schritt: Berechnen des Abstands d zwischen M und S

Berechne nun den Abstand d zwischen Mittelpunkt M der Kugel K und Lotfußpunkt S über den Betrag des zugehörigen Vektors $\overrightarrow{MS}$:

$$d = |\overrightarrow{MS}| = \left| \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 24 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 18 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(6)^2 + (6)^2 + (6)^2} \approx 10{,}39.$$

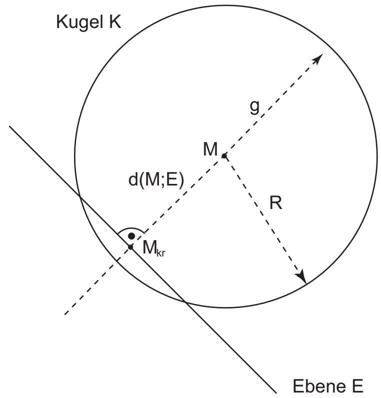
$\Longrightarrow$ Da der Abstand zwischen Ebene E und Mittelpunkt M der Kugel K mit $d \approx 10{,}39\,\text{LE}$ kleiner als der Radius R der Kugel K ist, hast du gezeigt, dass sich Ebene E und Kugel K schneiden.

(2) ▶ **Bestimmen des Mittelpunkts M_{kr} des Schnittkreises kr**

Nun sollst du die Koordinaten des Mittelpunkts M_{kr} des Schnittkreises kr der Ebene E und der Kugel K berechnen. Ausgehend davon, über welchen Weg (Lösungsweg A oder B) du oben den Abstand zwischen Kugel K und Ebene E berechnet hast, gibt es verschiedene Wege M_{kr} zu berechnen. Im Folgenden werden beide ausführlich behandelt:

1. Bestimmen von kr ausgehend von Lösungsweg A

Da bereits bekannt ist, dass sich Kugel K und Ebene E schneiden, kann davon ausgegangen werden, dass der Mittelpunkt M_{kr} des Schnittkreises kr auf einer Geraden liegt, welche durch den Mittelpunkt M von K und senkrecht zur Ebenen E verläuft (**Gerade g aus Aufgabenteil a**). Willst du also die Koordinaten von M_{kr} bestimmen, so schneidest du Gerade g mit der Ebene E (siehe rechts).



Seitenansicht des Sachverhalts

Bestimmen von M_{kr} über Gerade g

Die Geradengleichung von g ist (siehe Aufgabenteil a):

$$g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 24 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Forme Gerade g in einen von s abhängigen Vektor um und setze diesen in die oben bestimmte, Ebenengleichung von E in Koordinatenform ein:

$$g: \overrightarrow{x_g} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 24 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10+s \\ 10+s \\ 24+s \end{pmatrix} \text{ in } E:$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 26 \\ 10 + s + 10 + s + 24 + s &= 26 \\ 44 + 3 \cdot s &= 26 \qquad \mid -44 \\ 3 \cdot s &= -18 \;\Leftrightarrow\; s = -6 \end{aligned}$$

Die Koordinaten des Mittelpunkts M_{kr} von kr bestimmst du nun, indem du den eben bestimmten Parameterwert von s in die Geradengleichung von g einsetzt:

$$\overrightarrow{OM_{kr}} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 24 \end{pmatrix} - 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ Die Koordinaten des Mittelpunkts M_{kr} von kr sind: $M(4\,|\,4\,|\,18)$.

2. Bestimmen von kr ausgehend von Lösungsweg B

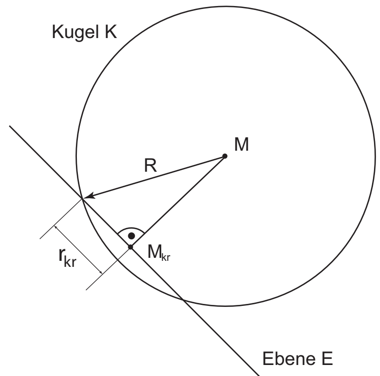
Beim Bestimmen des Abstands zwischen Ebene E und dem Kugelmittelpunkt M der Kugel K mit Hilfe einer Geraden hast du ein **Lot** von Punkt M aus auf die Ebene E gefällt. Dabei hast du die Koordinaten eines Lotfußpunktes S berechnet. Da der Mittelpunkt M_{kr} des Schnittkreises kr auf der Geraden liegt, welche durch den Mittelpunkt M der Kugel K und orthogonal zur Ebenen E verläuft (**Gerade g**), entspricht der Lotfußpunkt S dem Mittelpunkt M_{kr} des Schnittkreises S.

$\Longrightarrow$ Die Koordinaten des Mittelpunkts M_{kr} von kr sind: $M(4\,|\,4\,|\,18)$.

(3) **► Berechnen des Flächeninhalts A_{kr} des Schnittkreises kr**

Der Flächeninhalt A_{kr} des Schnittkreises kr berechnet sich über diese Formel:
$A_{kr} = \pi \cdot r_{kr}^2$.

Bevor du also den Flächeninhalt A_{kr} des Schnittkreises kr berechnen kannst, musst du dessen Radius r_{kr} berechnen. Der nebenstehenden Seitenansicht des Sachverhalts kannst du dabei entnehmen, dass Mittelpunkt M_{kr}, der Radius r_{kr} des Schnittkreises kr und Radius R der Kugel in einem rechtwinkligen Dreieck liegen.
Du kannst also mit dem Satz des Pythagoras den Radius r_{kr} des Schnittkreises kr berechnen.



Seitenansicht des Sachverhalts

1. Schritt: Bestimmen des Radius r_{kr} von kr

Den Radius r_{kr} von kr berechnest du jetzt, wie oben schon erwähnt, über den Satz des Pythagoras. Betrachtet wird dabei ein rechtwinkliges Dreieck, in dem die Strecke $\overline{MM_{kr}}$ und der Radius r_{kr} von kr als Katheten fungieren und Radius R von K die Hypotenuse bildet:

$$\overline{MM_{kr}}^2 + r_{kr}^2 = R^2 \qquad | \ -\overline{MM_{kr}}^2$$

$$r_{kr}^2 = R^2 - \left|\overrightarrow{MM_{kr}}\right|^2 = 12^2 - \left|\begin{pmatrix} 4-10 \\ 4-10 \\ 18-24 \end{pmatrix}\right|^2$$

$$r_{kr}^2 = 144 - \left(\sqrt{(-6)^2+(-6)^2+(-6)^2}\right)^2$$

$$r_{kr}^2 = 144 - (\sqrt{108})^2$$

$$r_{kr}^2 = 36 \ \Leftrightarrow \ r_{kr} \approx 6\,\text{LE}$$

Der Radius r_{kr} von kr ist $r_{kr} = 6\,\text{LE}$.

2. Schritt: Berechnen des Flächeninhalts A_{kr} des Schnittkreises kr

Den Flächeninhalt A_{kr} des Schnittkreises kr berechnest du nun über die oben angegebene Formel:

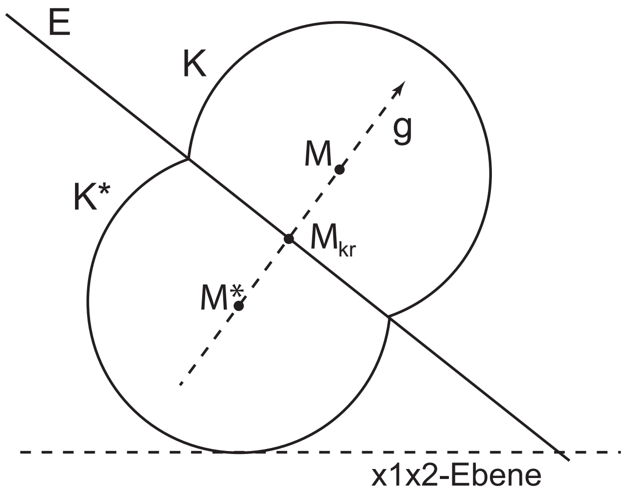
$$A_{kr} = \pi \cdot r_{kr}^2 = \pi \cdot (6\,\text{LE})^2 \approx 113,10\,\text{FE}.$$

$\Longrightarrow$ Der Flächeninhalt A_{kr} des Schnittkreises kr ist 113,10 FE.

(4) **► Bestimmen der Koordinaten des Mittelpunktes M^* der Kugel K^***

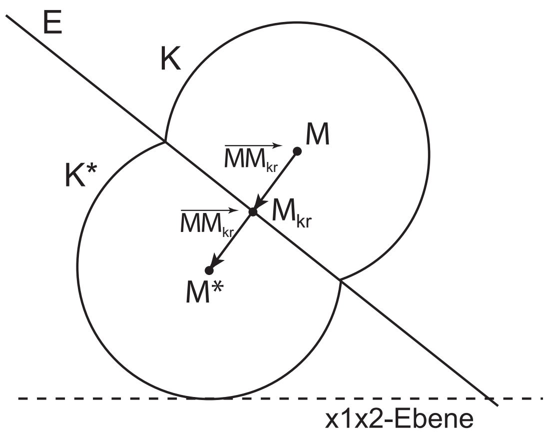
Hier ist es nun deine Aufgabe, die Koordinaten des Kugelmittelpunkts M^* der Kugel K^* zu berechnen. Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass Kugel K^* durch eine Spiegelung der Kugel K an der Ebene E entsteht. Beim Lösen dieser Aufgabe kann es sinnvoll sein, wenn du dir eine Skizze des Sachverhalts anfertigst.

Da durch die Spieglung von K an E auch der Mittelpunkt M der Kugel K an der Ebene E gespiegelt wird, entsteht der Mittelpunkt M^* durch Spiegelung des Mittelpunkts M der Kugel K an der Ebene E. Wird der Punkt M an der Ebene E gespiegelt, so befindet sich der gespiegelte Punkt M^* und der Ausgangspunkt M auf einer Geraden. Diese Gerade verläuft dabei orthogonal zur Ebenen E und entspricht also der Geraden g aus dem Aufgabenteil a. Des Weiteren besitzt der gespiegelte Mittelpunkt M^* den selben Abstand zur Ebenen E, wie Mittelpunkt M von K.



Berechnen der Koordinaten von M_{kr}

Aus den vorherigen Aufgabenteilen sind dir bereits Mittelpunkt M_{kr} und Vektor $\overrightarrow{MM_{kr}}$ bekannt. Da dir bekannt ist, dass Mittelpunkt M^* von Ebene E, also von Punkt M_{kr}, den gleichen Abstand besitzt, kannst du M^* berechnen, indem du den Vektor $\overrightarrow{MM_{kr}}$ zum Vektor $\overrightarrow{OM_{kr}}$ addierst (siehe rechts):



$$\overrightarrow{OM^*} = \overrightarrow{OM_{kr}} + \overrightarrow{MM_{kr}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

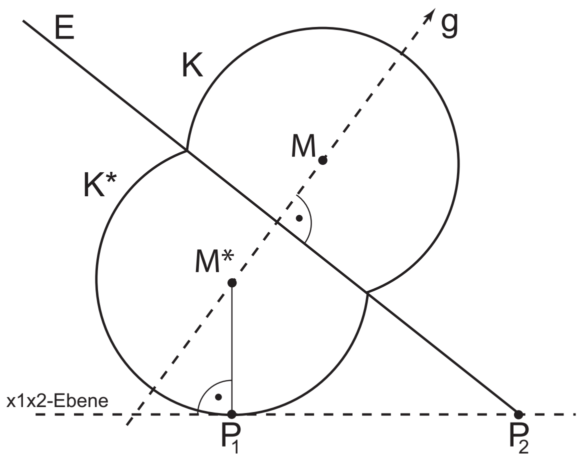
$$\overrightarrow{OM^*} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ Der Mittelpunkt M^* der Kugel K^* hat die Koordinaten $M^*(-2 \mid -2 \mid 12)$.

c) ▶ **Bestimmen der beiden Punkte, in denen der Hüpfball den Boden berührt** (5P)

Deine Aufgabe ist es hier, die Koordinaten der Beiden Punkte zu berechnen, in denen der Hüpfball den Boden berührt. Wie oben schon erwähnt, wird der Boden hier durch die x_1x_2-Ebene repräsentiert. Beim Lösen dieser Aufgabe ist es sinnvoll, wenn du dir den Sachverhalt zunächst skizzierst. Eine beispielhafte Skizze ist unten zu sehen.

Wie du der nebenstehenden Skizze entnehmen kannst, berührt das „Zwischenteil“ des Hüpfballs und die Kugel K^* die x_1x_2-Ebene. Der Punkt, in welchem die Kugel K^* die x_1x_2-Ebene berührt ist Punkt P_1. Der Mittelpunkt M^* der Kugel K^* liegt also, wie rechts zu sehen ist, senkrecht über dem Punkt P_1. Die Koordinaten von Punkt P_1 ermittelst du also über eine senkrechte Projektion des Mittelpunkts M^* auf die x_1x_2-Ebene. Punkt P_2 ist jener Punkt, an welchem das „Zwischenteil“ des Hüpfballs, repräsentiert durch Ebene E, die x_1x_2-Ebene berührt.



Aus den vorherigen Aufgabenteilen ist dir die Gerade g bekannt. Diese Gerade g besitzt also Stützvektor den Mittelpunkt M der Kugel K und als Richtungsvektor den Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene E. Sie steht also senkrecht auf der Ebene E. Würde man ebenfalls Punkt M auf die x_1x_2-Ebene projizieren, so würden die Punkte P_1, P_2 und der projizierte Mittelpunkt M_p auf einer Geraden liegen. Diese Gerade entspricht der in die x_1x_2-Ebene projizierten Geraden g. Die Koordinaten des Punktes P_2 berechnest du, indem du zunächst Gerade g in die x_1x_2-Ebene projiziert. Hast du die projizierte Gerade g^* bestimmt, so entspricht der Schnittpunkt dieser Geraden g^* und der Ebene E dem gesuchten Berührpunkt P_2.

1. Schritt: Bestimmen der Koordinaten von Punkt P_1

Wie oben schon erwähnt, entsteht Punkt P_1 durch eine senkrechte Projektion des Punktes M^* auf die x_1x_2-Ebene. Jeder Punkt, welcher in der x_1x_2-Ebenen liegt, besitzt eine x_3-Koordinate von $x_3 = 0$. Für den projizierten Mittelpunkt M^* bzw. für Punkt P_1 folgt also:
$\Longrightarrow P_1(-2 \mid -2 \mid 0)$

2. Schritt: Bestimmen der Koordinaten von Punkt P_2

Der Punkt P_2 entspricht dem Schnittpunkt der, in die x_1x_2-Ebene projizierten, Geraden g^* und der Ebene E. Du musst also erst bestimmen, wie die senkrechte Projektion der Geraden g, also Gerade g^* aussieht. Gerade g^* entsteht aus Gerade g, indem man im Stützvektor und Richtungsvektor von g jeweils die x_3-Einträge im Vektor Null setzt:

$$g : \overrightarrow{x} =)(+ s \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad g^* : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix}10\\10\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Forme nun g^* nun in einen von t abhängigen Vektor um und setzte diesen in die in einem vorherigen Aufgabenteil bestimmten Ebenengleichung der Ebene E in Koordinatenform ein:

$$g^* : \overrightarrow{x_{g^*}} = \begin{pmatrix}10\\10\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10+t\\10+t\\0\end{pmatrix} \text{ in } E:$$

$$\begin{aligned}(10+t)+(10+t)+0 &= 26\\ 20+2\cdot t &= 26 \qquad \mid -20\\ 2\cdot t = 6 \;&\Leftrightarrow\; t=3\end{aligned}$$

Willst du nun die Koordinaten des Berührpunkts P_2 berechnen, so setzt du den eben bestimmten Parameterwert für t in die Geradengleichung von g^* ein und berechnest so den zugehörigen Stützvektor $\overrightarrow{OP_2}$:

$$\overrightarrow{OP_2} = \begin{pmatrix}10\\10\\0\end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}13\\13\\0\end{pmatrix}.$$

$\Longrightarrow$ Der Hüpfball berührt den Boden also in den Punkten $P_1(-2\,|\,-2\,|\,0)$ und $P_1(13\,|\,13\,|\,0)$.

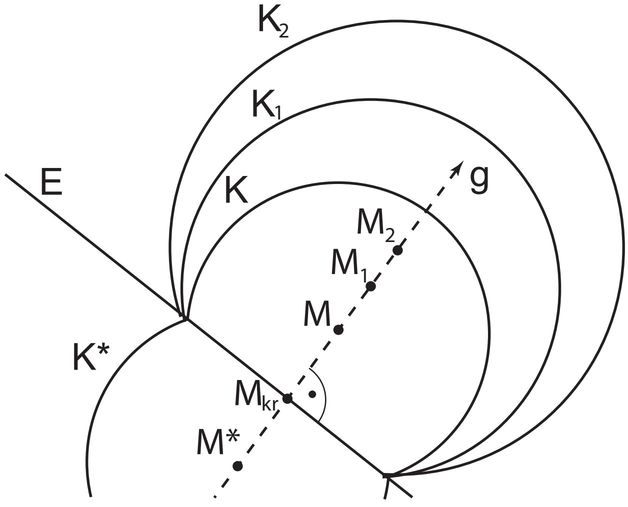
d) ► **Bestimmen einer Gleichung der Schar K_t** (5P)

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass beide Bälle sehr elastisch sind. Nun wird der obere Ball, beschrieben durch Kugel K weiter aufgepumpt. Da der obere Ball fest am Hüpfbrett befestigt ist, ändert sich die Aussparung in diesem nicht. Das heißt alle Kugeln, die den oberen Ball des Hüpfballs repräsentieren, besitzen den gleichen Schnittkreis mit der Ebene E. Diesen Schnittkreis kr hast du bereits in einem vorherigen Aufgabenteil bestimmt. Der untere Ball (Kugel K^*) verändert sich nicht durch das Aufpumpen des oberen Balls.
Deine Aufgabe ist es nun, eine Gleichung der Schar K_t aller Kugeln zu ermitteln, welche die Ebene E mit Schnittkreis kr schneiden.

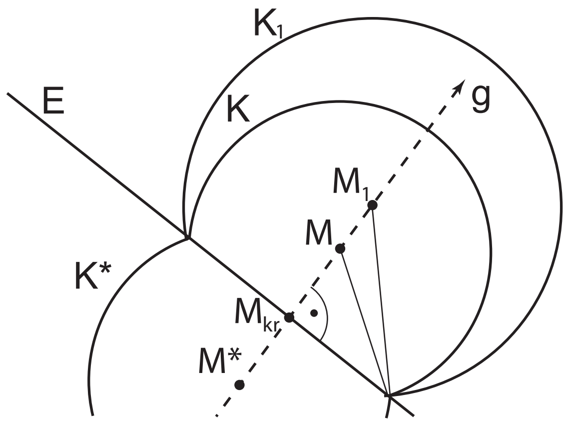
Die allgemeine Form einer Kugelgleichung in Vektorform ist folgende:
$\left[\overrightarrow{x} - \overrightarrow{m}\right]^2 = r^2$ mit:

- $\overrightarrow{m}$: Ortsvektor des Mittelpunkts M der Kugel.
- $\overrightarrow{r}$: Radius der Kugel.

Hier gilt es also, einen von t abhängigen Vektor für die Mittelpunkte M_t und einen von t abhängigen Radius r_t der verschiedenen Scharkugeln zu bestimmen. Vergrößert oder verkleinert man nun die obere Kugel des Hüpfballs, so liegen die Mittelpunkte der neu entstehenden Kugeln weiterhin auf der Geraden g (siehe rechts). Gerade g dargestellt als Vektor dient also als der Vektor, welcher in Abhängigkeit von t, die Lage der Mittelpunkte M_t der Kugelschar K_t beschreibt.



Im Aufgabenteil b war es deine Aufgabe den Flächeninhalt des Schnittkreises kr zu berechnen. Dazu hast du den Radius r_S des Schnittkreises benötigt. Diesen Radius r_S hast du über den Satz des Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck, in welchem auch der Radius R der Kugel K und die Strecke $\overrightarrow{MM_{kr}}$ lag, berechnet. Da nun aber die Kugelschar K_t betrachtet wird, ist Lage der Mittelpunkte mit M_t und der Radius r_t variabel. Stellst du nun denselben Satz des Pythagoras wie im Aufgabenteil b auf, so sieht dieser wie folgt aus:



$\overline{M_{kr}M_t}^2 + r_{kr}^2 = r_t^2$ mit r_t unbekannt.

1. Schritt: Bestimmen der Mittelpunkte M_t der Kugelschar K_t

Wie oben schon erwähnt, liegen alle Mittelpunkte der Kugelschar K_t auf der Geraden g. Willst du nun einen von t abhängigen Vektor bilden, welcher die Lage der Mittelpunkte M_t der Kugelschar K_t beschreibt, formst du Gerade g in einen von t abhängigen Vektor um:

$$g : \overrightarrow{x_g} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 24 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10+t \\ 10+t \\ 24+t \end{pmatrix} \mathrel{\widehat{=}} \overrightarrow{OM_t}$$

2. Schritt: Bestimmen der Radien r_t der Kugelschar K_t

Willst du nun die Radien r_t der Kugelschar K_t bestimmen, so berechnest du den oben aufgestellten Satz des Pythagoras und formst diesen nach den Radien r_t der Kugelschar K_t um:

$$\begin{aligned}
\overline{M_{kr}M_t}^2 + r_{kr}^2 &= r_t^2 \\
\left|\overrightarrow{M_{kr}M_t}\right|^2 + 6^2 &= r_t^2 \\
\left|\begin{pmatrix} 10+t \\ 10+t \\ 24+t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 18 \end{pmatrix}\right|^2 + 36 &= r_t^2 \\
\left|\begin{pmatrix} 6+t \\ 6+t \\ 6+t \end{pmatrix}\right|^2 + 36 &= r_t^2 \\
\left(\sqrt{(6+t)^2 + (6+t)^2 + (6+t)^2}\right)^2 + 36 &= r_t^2 \\
3 \cdot (6+t)^2 + 36 &= r_t^2 \\
3 \cdot (36 + 12 \cdot t + t^2) + 36 &= r_t^2 \\
108 + 36 \cdot t + 3 \cdot t^2 + 36 &= r_t^2 \\
144 + 36 \cdot t + 3 \cdot t^2 &= r_t^2
\end{aligned}$$

Setze nun die von t abhängigen Mittelpunkt M_t und die von t abhängigen Radien r_t in die oben gezeigt Kugelgleichung in Vektorform ein und bestimme so die Gleichung der Kugelschar K_t.

$\Longrightarrow$ Die Kugelschar K_t hat folgende Gleichung: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 10+t \\ 10+t \\ 24+t \end{pmatrix}\right]^2 = 144 + 36 \cdot t + 3 \cdot t^2.$