Die folgende Tabelle zeigt die Entwicklung einer Mäusepopulation in einem Lagerhaus für 200 Tage:

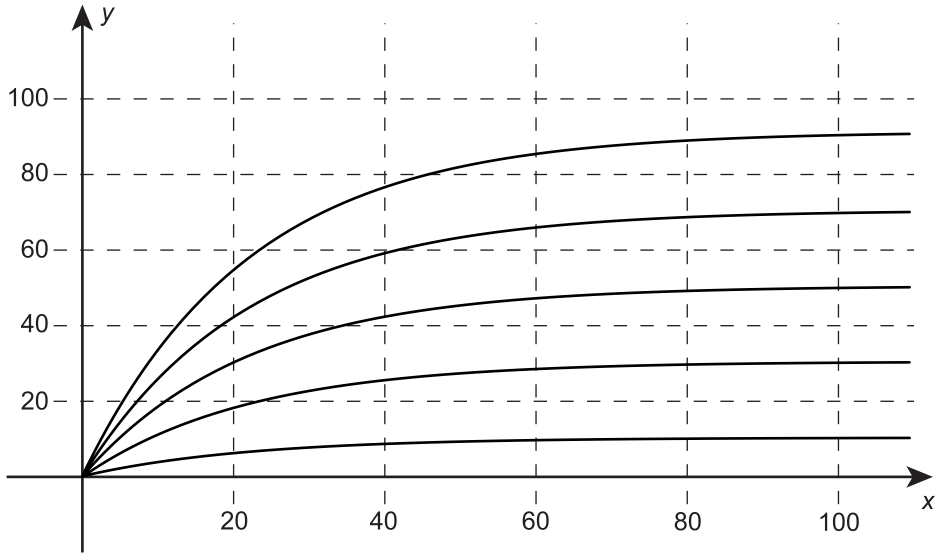
Zeit in Tagen	0	10	20	30	40	50	100	150	160	170	180	190	200
Anzahl der Mäuse	50	80	132	215	350	540	2990	4740	4840	4900	4940	4960	4980

a) Für die ersten 50 Tage soll exponentielles Wachstum mit der Funktion f mit $f(x) = a \cdot e^{k \cdot x}$ angenommen werden; x in Tagen und $f(x)$ in Anzahl der Mäuse zum Zeitpunkt x. (12P)
Bestimmen Sie die Parameter a und k mit Hilfe der Daten für $x = 0$ und $x = 40$.
(Kontrollergebnis: $a = 50$ und $k = \frac{\ln(7)}{40} \approx 0{,}04865$)
Berechnen Sie, wie viele Mäuse nach 47 Tagen im Lagerhaus leben.
Bestimmen Sie den Tag, in dessen Verlauf die Anzahl von 400 Mäusen überschritten wird.
Ermitteln Sie den Tag, an dem die momentane Zuwachsrate erstmalig größer als 10 Mäuse pro Tag ist.

b) Nun soll der Zeitraum ab dem 150. Tag genauer untersucht werden. Für diesen Zeitraum wird beschränktes Wachstum mit der Funktion g mit $g(x) = 5.000 - 500.000 \cdot e^{-0{,}05 \cdot x}$ angenommen; x in Tagen und $g(x)$ in Anzahl der Mäuse zum Zeitpunkt x. (13P)
Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x \to \infty} g(x)$ und erläutern Sie die Bedeutung des Grenzwertes im Sachzusammenhang.
Bestimmen Sie den Tag, in dessen Verlauf die Anzahl der Mäuse 99 % des maximal möglichen Bestandes überschreitet.
Skizzieren Sie den Graphen der Funktion g und die Asymptote in das Koordinatensystem der Anlage.
Erläutern Sie anhand der erstellten Abbildung die Möglichkeiten und Grenzen der beiden hier verwendeten mathematischen Modelle „exponentielles Wachstum“ bzw. „beschränktes Wachstum“.

c) Bestimmen Sie die Ableitung von g und dokumentieren Sie hierzu einen Lösungsweg, der ohne den Einsatz eines Rechners nachvollziehbar ist. (10P)
Erläutern Sie $g'(160) = 8{,}3...$ im Sachzusammenhang.
Bestimmen Sie den Tag, in dessen Verlauf die momentane Änderungsrate von g mit der durchschnittlichen Änderungsrate zwischen dem 150. und 200. Tag übereinstimmt.

d) Die Funktionsgleichung $g_S(x) = S - S \cdot e^{-0{,}05 \cdot x}$ beschreibt für verschiedene Werte des Parameters S mögliche Entwicklungen von Populationen nach dem Modell des beschränkten Wachstums; in dem Bild finden sich Graphen für verschiedene Werte für S mit $S > 0$ und $x \geq 0$.



(9P)

Begründen Sie für $x \geq 0$ anhand des Funktionsterms den Einfluss des Parameters S auf

- den Schnittpunkt mit der y-Achse und
- die Asymptote.

Untersuchen Sie, ob der Wert $\frac{1}{2}S$ für alle Funktionen g_S an der Stelle erreicht wird.
Beweisen Sie die folgende Aussage: Wenn man S verdoppelt, verdoppelt sich an jeder Stelle die lokale Änderungsrate.

Material

Anlage: Koordinatensystem zu Teilaufgabe b)