a) **Berechnung der Achsenschnittpunkte** (18VP)

Um den Schnittpunkt $S_y(0\,|\,f(0))$ des Graphen mit der $y$-Achse zu bestimmen, wird zunächst der Funktionswert an der Stelle $x=0$ ausgewertet:

$$f(0) = -\frac{1}{27}\cdot 0^4 + \frac{2}{3}x^2 + 1 = 1$$

Der Schnittpunkt ist somit $S_y(0\,|\,1)$.

Um die Schnittpunkte mit der $x$-Achse zu bestimmen, müssen diejenigen Stellen gesucht werden, an denen $f(x) = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ -\frac{1}{27}x^4 + \frac{2}{3} + 1 &= 0 \qquad |\cdot(-27) \\ x^4 - 18x^2 - 27 &= 0 \end{aligned}$$

Dies ist keine quadratische, sondern eine **biquadratische** Gleichung. Sie lässt sich nur lösen, indem das $x^2$ durch $u$ ersetzt wird, es wird also mit $x^2 = u$ **substituiert**:

$$\begin{aligned} u^2 - 18u - 27 &= 0 \\ u_{1/2} &= 9 \pm \sqrt{9^2 - (-27)} = 9 \pm \sqrt{108} \\ u_1 &= 9 + \sqrt{108} \\ u_2 &= 9 - \sqrt{108} \end{aligned}$$

Nun muss das ganze rückgängig gemacht werden, also gilt wieder $u = x^2$.
Die die Lösung $u_2$ näherungsweise $u_2 \approx -1{,}39$ lautet, kann diese Lösung nicht resubstituiert (rückersetzt) werden. Es kann nur $u_1$ eine Lösung ergeben:

$$\begin{aligned} x^2 = u_1 &= 9 + \sqrt{108} \\ x_{1/2} &= \pm\sqrt{9 + \sqrt{108}} \approx \pm 4{,}4 \end{aligned}$$

Der Graph von $f$ schneidet die $x$-Achse somit näherungsweise in den Punkten $S_{x_1}(-4{,}4\,|\,0)$ und $S_{x_2}(4{,}4\,|\,0)$.

**Berechnung der relativen Extrempunkte**

An den Extremstellen des Graphen von $f$ gilt $f'(x) = 0$ als notwendige Bedingung. Für die ersten beiden Ableitungen von $f$ gilt dabei:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{4}{27}x^3 + \frac{4}{3}x \\ f''(x) &= -\frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Mit der notwendigen Bedingung ergibt sich für die Extremstellen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ -\frac{4}{27}x^3 + \frac{4}{3}x &= 0 \qquad |:\left(-\tfrac{4}{27}\right) \\ x^3 - 9x &= 0 \\ x(x^2 - 9) &= 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \\ x^2 - 9 &= 0 \\ x_{2/3} &= \pm 3 \end{aligned}$$


Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

Die möglichen Extremstellen von $f$ liegen somit bei $x = 0$, $x = 3$ sowie $x = -3$. Um sie als Extremstellen endgültig nachzuweisen und ihre Art zu bestimmen werden die Werte in die zweite Ableitung von $f$ eingesetzt:

$$f''(0) = -\frac{4}{9} \cdot 0^2 + \frac{4}{3} = \frac{4}{3} > 0 \qquad \Rightarrow \text{ Minimum bei } x = 0$$

$$f''(-3) = -\frac{4}{9} \cdot (-3)^2 + \frac{4}{3} = -\frac{8}{9} < 0 \quad \Rightarrow \text{ Maximum bei } x = -3$$

$$f''(3) = -\frac{4}{9} \cdot 3^2 + \frac{4}{3} = -\frac{8}{9} < 0 \qquad \Rightarrow \text{ Maximum bei } x = 3$$

Die zugehörigen Funktionswerte an diesen Stellen sind:

$$f(0) = -\frac{1}{27} \cdot 0^4 + \frac{2}{3} \cdot 0^2 + 1 = 1 \qquad \Rightarrow \text{ Tiefpunkt } T(0\,|\,1)$$

$$f(-3) = -\frac{1}{27} \cdot (-3)^4 + \frac{2}{3} \cdot (-3)^2 + 1 = 4 \quad \Rightarrow \text{ Hochpunkt } H_1(-3\,|\,4)$$

$$f(3) = -\frac{1}{27} \cdot 3^4 + \frac{2}{3} \cdot 3^2 + 1 = 4 \qquad \Rightarrow \text{ Hochpunkt } H_2(3\,|\,4)$$

**Begründung, dass der Graph achsensymmetrisch ist**

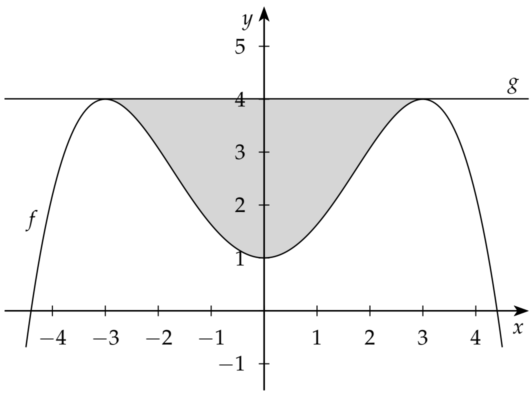
Wenn der Graph achsensymmetrisch ist, muss $f(-x) = f(x)$ gelten:

$$f(-x) = -\frac{1}{27}(-x)^4 + \frac{2}{3}(-x)^2 + 1 = -\frac{1}{27}x^4 + \frac{2}{3}x^2 + 1 = f(x)$$

Damit ist der Graph symmetrisch zur $y$-Achse. Alternativ hätte auch die Tatsache gereicht, dass es sich bei der Funktion $f$ um eine ganzrationale Funktion handelt, in der **nur gerade Exponenten** auftreten.

b) **Einzeichnung der Geraden und Berechnung des gesuchten Flächeninhalts** (11VP)

Die Gerade $g$: $y = 4$ ist eine Parallele zur $x$-Achse mit einem Abstand von 4.
Der gesuchte Flächeninhalt ist nebenstehend grau schraffiert und ergibt sich als Fläche zwischen den Graphen von $g$ und $f$, wobei $g$ hier die obere Funktion ist. Als Integrationsgrenzen ergeben sich die beiden Schnittstellen der Funktionen, also $x = -3$ und $x = 3$.




Wegen der Symmetrie der Fläche zur $x$-Achse kann der Flächeninhalt auch einfach als doppeltes Integral von 0 bis 3 berechnet werden!

$$\begin{aligned}
A &= 2 \cdot \int_0^3 (g(x) - f(x))\, dx = 2 \cdot \int_0^3 \left(4 - \left(-\frac{1}{27}x^4 + \frac{2}{3}x^2 + 1\right)\right)\, dx \\
&= 2 \cdot \int_0^3 \left(\frac{1}{27}x^4 - \frac{2}{3}x^2 + 3\right)\, dx \\
&= 2 \cdot \left[\frac{1}{135}x^5 - \frac{2}{9}x^3 + 3x\right]_0^3 = 2 \cdot \left(\frac{1}{135} \cdot 3^5 - \frac{2}{9} \cdot 3^3 + 3 \cdot 3 - 0\right) \\
&= 2 \cdot 4{,}8 = 9{,}6
\end{aligned}$$

Die Fläche besitzt einen Inhalt von 9,6 FE.


Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

c) **Bestimmung der Parabelgleichung** (13VP)

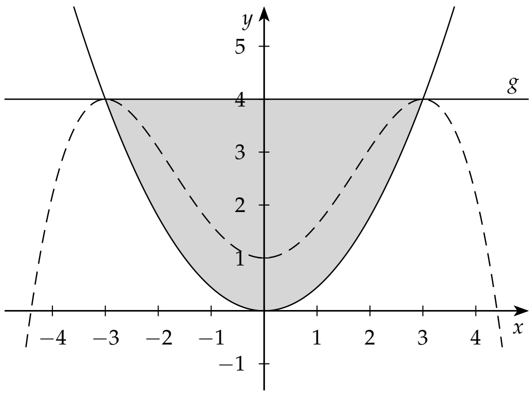
Da die Parabel ihren Scheitel im Ursprung besitzen soll, hat sie allgemein die Funktionsgleichne $y = ax^2$. Um den fehlenden Parameter $a$ zu bestimmen, werden die Koordinaten des Hochpunktes $H_2(3\,|\,4)$ in diese Gleichung eingesetzt, denn dieser Punkt liegt auf der Parabel:

$$4 = a \cdot 3^2 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{4}{9}$$

Die Parabel hat somit die Gleichung $y = \frac{4}{9}x^2$.

**Berechnung des gesuchten Flächeninhalts**

Um die gesuchte, nebenstehend grau schraffierte Fläche zu bestimmen, wird das gleiche Prinzip wie oben angewandt: Der Flächeninhalt ergibt sich als Integral über der oberen Funktion $g$ minus der unteren Funktion, der Parabel $y = \frac{4}{9}x^2$ von den Schnittstellen $x = -3$ bis $x = 3$. Wegen der Achsensymmetrie entspricht der Flächeninhalt auch hier einfach dem doppelten Integral von 0 bis 3:




$$A = 2 \cdot \int_0^3 \left(4 - \frac{4}{9}x^2\right)\,dx = 2 \cdot \left[4x - \frac{4}{27}x^3\right]_0^3$$
$$= 2 \cdot \left(4 \cdot 3 - \frac{4}{27} \cdot 3^2 - 0\right)$$
$$= 2 \cdot 8 = 16$$

Die Fläche hat einen Flächeninhalt von 16 FE.

**Nachweis, dass sich der Flächeninhalt auch mit der zweiten Formel berechnen lässt**

Die beiden Schnittpunkte der Geraden mit der Parabel sind genau die beiden Hochpunkte $H_1(-3\,|\,4)$ und $H_2(3\,|\,4)$ der Funktion $f$. Diese haben einen Abstand von $s = 3 - (-3) = 6$ LE.

Der Scheitelpunkt der Parabel liegt im **Ursprung**, von dem die Gerade $g$: $y = 4$ logischerweise einen Abstand von 4 LE hat, damit ist $h = 4$.

Mit der gegebenen Formel ergibt sich damit für den Flächeninhalt:

$$A = \frac{2}{3} \cdot s \cdot h = \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 4 = 16$$

Mit dieser Formel ergibt sich somit dasselbe Ergebnis für den gesuchten Flächeninhalt wie mit der obigen Integration.

d) **Nachweis, dass die gegebene Formel für jede beliebige Gerade gilt** (8VP)

Es muss nun hier gezeigt werden, dass die Formel von oben für die Parabel $y = \frac{4}{9}x^2$ für die Gerade $y = 4$, sondern **für jede beliebige** Gerade mit $y = c$ ($c > 0$) gilt. Dazu wird genauso wie oben vorgegangen.

Die Fläche entspricht nun der eingeschlossenen Fläche zwischen Parabel und der Geraden $y = c$. Die Integrationsgrenzen ergeben sich ebenso wie oben aus den Schnittstellen dieser beiden Funktionen, die durch **Gleichsetzen** ermittelt werden können:


Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

$$\frac{4}{9}x^2 = c \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{9}{4}c \quad \Leftrightarrow \quad x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{9}{4}c} = \pm\sqrt{\frac{9}{4}}\sqrt{c} = \pm\frac{3}{2}\sqrt{c}$$

Die Schnittstellen und somit Integrationsgrenzen sind $x_1 = \frac{3}{2}\sqrt{c}$ und $x_2 = -\frac{3}{2}\sqrt{c}$.

Mit der Achsensymmetrie kann der Flächeninhalt auch hier über das doppelte Integral von 0 bis $\frac{3}{2}\sqrt{c}$ berechnet werden:

$$\begin{aligned} A &= 2 \cdot \int_0^{\frac{3}{2}\sqrt{c}} \left(c - \frac{4}{9}x^2\right)\,dx = 2 \cdot \left[cx - \frac{4}{27}x^3\right]_0^{\frac{3}{2}\sqrt{c}} \\ &= 2 \cdot \left(c \cdot \frac{3}{2}\sqrt{c} - \frac{4}{27} \cdot \left(\frac{3}{2}\sqrt{c}\right)^3 - 0\right) = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}c\sqrt{c} - \frac{4}{27} \cdot \frac{27}{8}c\sqrt{c}\right) \\ &= 2 \cdot \left(\frac{3}{2}c\sqrt{c} - \frac{1}{2}c\sqrt{c}\right) = 2c\sqrt{c} \end{aligned}$$

Beachten Sie dabei, dass $(\sqrt{c})^3 = \sqrt{c} \cdot \sqrt{c} \cdot \sqrt{c} = c\sqrt{c}$ ist.

Weiterhin entspricht dem Abstand der beiden Schnittpunkte von der Parabel und der Geraden der Differenz der beiden Schnittstellen:

$$s = \frac{3}{2}\sqrt{c} - \left(-\frac{3}{2}\sqrt{c}\right) = 3\sqrt{c}$$

Der Abstand $h$ ergibt sich wieder als Abstand der Geraden zum Ursprung, also ist $h = c$.

Mit der gegebenen Formel ergibt sich hier:

$$A = \frac{2}{3} \cdot s \cdot h = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{c} \cdot c = 2c\sqrt{c}$$

Damit ist nachgewiesen, dass die gegebene Formel für den Flächeninhalt für jede Gerade $y = c$ mit $c > 0$ gilt.


Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.