

**ILLUSTRIERENDE PRÜFUNGSAUFGABEN FÜR DIE SCHRIFTLICHE ABITURPRÜFUNG****Teil 1: Beispielaufgaben**

Die Illustrierenden Prüfungsaufgaben (Teil 1: Beispielaufgaben, Teil 2: Erläuterungen und Lösungsvorschläge) dienen der einmaligen exemplarischen Veranschaulichung von Struktur, Anspruch und Niveau der Abiturprüfung im neunjährigen Gymnasium in Bayern.

# Mathematik

## erhöhtes Anforderungsniveau

### Prüfungsteil A

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **keine Hilfsmittel** verwendet werden, mit Ausnahme eines Rechtschreibwörterbuchs Deutsch, das nach Erklärung des Verlags die aktuellen amtlichen Regeln vollständig umsetzt.

**Spätester Abgabezeitpunkt: 110 Minuten nach Prüfungsbeginn**

Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.

**Vom Prüfling auszufüllen:**

Insgesamt sind **zwei** Kreuze zu setzen.

Ich wähle für die Aufgabengruppe 2 (Wahlteil) des Prüfungsteils A aus den Aufgaben A5 bis A10 folgende zwei Aufgaben zur Bearbeitung aus; nur diese gehen in die Bewertung ein:

- Aufgabe A5 (Analysis)
- Aufgabe A6 (Analysis)
- Aufgabe A7 (Stochastik)
- Aufgabe A8 (Stochastik)
- Aufgabe A9 (Geometrie)
- Aufgabe A10 (Geometrie)

## Aufgabengruppe 1 (Pflichtteil)

Jede der Aufgaben A1 bis A4 ist zu bearbeiten.

BE

### Aufgabe A1 (Analysis)

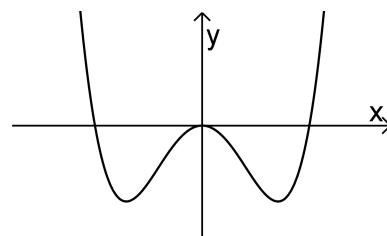
Gegeben ist die in  $\mathbb{R}^+$  definierte Funktion  $f: x \mapsto (\ln x)^2$ . Der Graph von  $f$  verläuft durch den Punkt  $P(e|1)$ .

- a Die zweite Ableitungsfunktion von  $f$  besitzt an der Stelle  $x = e$  eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel. Geben Sie die Bedeutung dieser Tatsache für den Graphen von  $f$  an.
- b Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen von  $f$  im Punkt  $P$ .

1  
4  
5

### Aufgabe A2 (Analysis)

Gegeben ist eine in  $\mathbb{R}$  definierte Funktion  $f$  mit  $f(x) = x^4 - kx^2$ , wobei  $k$  eine positive reelle Zahl ist. Die Abbildung zeigt den Graphen von  $f$ .



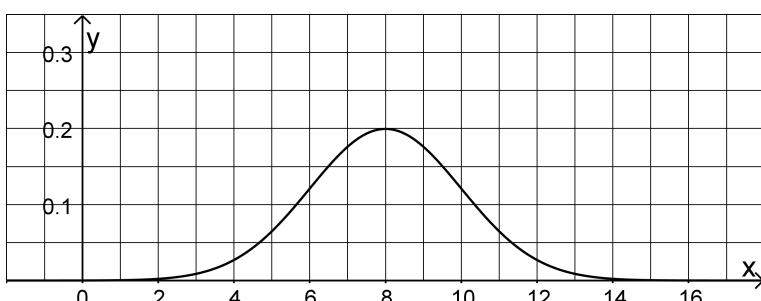
BE  
1  
4  
5

- a Zeigen Sie, dass  $f'(x) = 2x \cdot (2x^2 - k)$  ein Term der ersten Ableitungsfunktion von  $f$  ist.
- b Die beiden Tiefpunkte des Graphen von  $f$  haben jeweils die  $y$ -Koordinate  $-1$ . Ermitteln Sie den Wert von  $k$ .

BE

### Aufgabe A3 (Stochastik)

Die Abbildung zeigt den Graphen der Dichtefunktion der normalverteilten Zufallsgröße  $A$ .



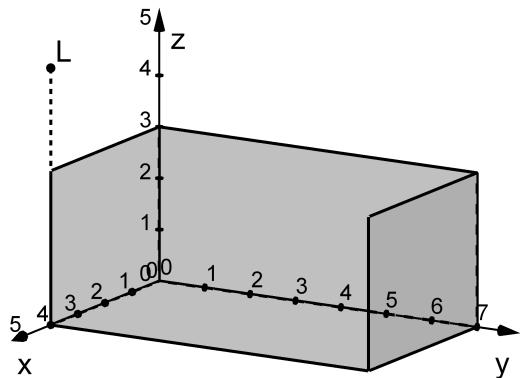
2  
3  
5

- a Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass  $A$  einen Wert aus dem Intervall  $[6;10]$  annimmt, beträgt etwa  $68\%$ . Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass  $A$  einen Wert annimmt, der größer als  $10$  ist.
- b Die Zufallsgröße  $B$  ist ebenfalls normalverteilt; der Erwartungswert von  $B$  ist ebenso groß wie der Erwartungswert von  $A$ , die Standardabweichung von  $B$  ist größer als die Standardabweichung von  $A$ . Skizzieren Sie in der Abbildung einen möglichen Graphen der Dichtefunktion von  $B$ .

**Aufgabe A4 (Geometrie)**

Die Abbildung zeigt in einem Koordinatensystem modellhaft eine 7 m breite Theaterkulisse. Die linke Seitenwand liegt im Modell in der  $xz$ -Ebene, die rechte Seitenwand ist dazu parallel. Ein auf der Bühne stehender Gegenstand wird von einer Lampe beleuchtet. Die Lampe wird im Modell durch den Punkt  $L(4|0|5)$  dargestellt, die Spitze des Gegenstands durch den Punkt  $S(1|6|2)$ .

Untersuchen Sie rechnerisch, ob der Schatten der Spitze auf der rechten Seitenwand liegt.



BE

5

5

## Aufgabengruppe 2 (Wahlteil)

Aus den Aufgaben A5 bis A10 sind vom Prüfling zwei beliebige Aufgaben zur Bearbeitung auszuwählen.

### Aufgabe A5 (Analysis)

Gegeben sind die in  $\mathbb{R}$  definierten Funktionen  $f$  und  $g$ . Der Graph von  $f$  ist symmetrisch bezüglich der  $y$ -Achse, der Graph von  $g$  ist symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs. Beide Graphen haben einen Hochpunkt im Punkt  $(2|1)$ .

a Geben Sie für die Graphen von  $f$  und  $g$  jeweils die Koordinaten und die Art eines weiteren Extrempunkts an.

b Untersuchen Sie die in  $\mathbb{R}$  definierte Funktion  $h$  mit  $h(x) = f(x) \cdot (g(x))^3$  im Hinblick auf eine mögliche Symmetrie ihres Graphen.

BE

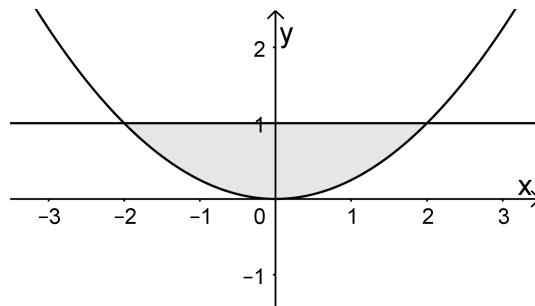
2

3

5

### Aufgabe A6 (Analysis)

Der Graph der in  $\mathbb{R}$  definierten Funktion  $f: x \mapsto \frac{1}{4}x^2$  und die Gerade mit der Gleichung  $y = 1$  schließen ein Flächenstück ein (vgl. Abbildung). Durch Rotation dieses Flächenstücks um die  $y$ -Achse wird ein Körper erzeugt. Bestimmen Sie das Volumen dieses Körpers.



BE

5

5

### Aufgabe A7 (Stochastik)

Bei einem Spiel werfen zwei Spieler abwechselnd jeweils drei Würfel. Das Spiel endet, wenn ein Spieler die Augensumme 18 erzielt oder die Augensumme des vorausgegangenen Wurfs des anderen Spielers nicht übertrifft.

Beim ersten Wurf des Spiels erzielt ein Spieler die Augensumme 15.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieser Spieler die Würfel im selben Spiel noch einmal wirft. Erläutern Sie Ihr Vorgehen.

BE

5

5

**Aufgabe A8 (Stochastik)**

Eine Gärtnerei, die Tulpen in den Farben Gelb, Orange und Rot züchtet, stellt Sträuße mit jeweils 15 Tulpen zusammen.

- a Einer der Sträuße soll Tulpen in zwei verschiedenen Farben enthalten. Die Anzahl der Möglichkeiten, diesen Strauß zusammenzustellen, kann mit dem Term  $\binom{3}{2} \cdot 14$  berechnet werden.

Beschreiben Sie für jeden der beiden Faktoren die Bedeutung im Sachzusammenhang.

- b In einem der Sträuße sollen zu jeder der drei Farben mindestens vier und höchstens sechs Tulpen enthalten sein. Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, diesen Strauß zusammenzustellen.

BE

2

3

5

**Aufgabe A9 (Geometrie)**

Gegeben sind die Punkte A(0|0|0), B(3|4|1), C(1|7|3) und D(-2|3|2).

- a Weisen Sie nach, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist.

- b Der Punkt T liegt auf der Strecke  $\overline{AC}$ . Das Dreieck ABT hat bei B einen rechten Winkel. Ermitteln Sie das Verhältnis der Länge der Strecke  $\overline{AT}$  zur Länge der Strecke  $\overline{CT}$ .

BE

1

4

5

BE

5

5

**Aufgabe A10 (Geometrie)**

Die Punkte P und Q liegen in der Ebene  $E: 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 6 = 0$  und haben voneinander den Abstand 10. Ermitteln Sie mögliche Koordinaten von P und Q.

## ILLUSTRIERENDE PRÜFUNGSAUFGABEN FÜR DIE SCHRIFTLICHE ABITURPRÜFUNG

### Teil 1: Beispielaufgaben

Die Illustrierenden Prüfungsaufgaben (Teil 1: Beispielaufgaben, Teil 2: Erläuterungen und Lösungsvorschläge) dienen der einmaligen exemplarischen Veranschaulichung von Struktur, Anspruch und Niveau der Abiturprüfung im neunjährigen Gymnasium in Bayern.

# Mathematik erhöhtes Anforderungsniveau

## Prüfungsteil B

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen zusätzlich zu einem Rechtschreibwörterbuch Deutsch, das nach Erklärung des Verlags die aktuellen amtlichen Regeln vollständig umsetzt, folgende Hilfsmittel<sup>1</sup> verwendet werden, sobald die Abgabe von Prüfungsteil A erfolgt ist:

- das vom Staatsministerium genehmigte Dokument mit mathematischen Formeln
- eine der vom Staatsministerium für Leistungserhebungen zugelassenen mathematisch-naturwissenschaftlichen Formelsammlungen
- ein wissenschaftlicher Taschenrechner, der den vom Staatsministerium getroffenen Regelungen entspricht

Zu den Sachgebieten Analysis, Stochastik und Geometrie wählt der Fachausschuss jeweils eine der beiden Aufgaben zur Bearbeitung aus.

**Spätester Abgabetermin: 300 Minuten nach Prüfungsbeginn**

Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.

<sup>1</sup> In den Abiturprüfungen 2026 und 2027 sind außerdem stochastische Tabellen als weiteres Hilfsmittel zugelassen.

**Aufgabe B1 (Analysis)**

- 1 Gegeben ist die in  $\mathbb{R}$  definierte Funktion  $f: x \mapsto \frac{1}{100} \cdot (2x^3 - 43x^2 + 248x)$ . Abbildung 1 zeigt den Graphen  $G_f$  von  $f$  im Bereich  $0 \leq x \leq 10$ .



Abb. 1

- a Begründen Sie anhand des Terms von  $f$ , dass  $G_f$  nicht symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist, und zeigen Sie rechnerisch, dass  $G_f$  für  $x < 7\frac{1}{6}$  rechtsgekrümmt ist. 4
- b Es gibt eine Stelle  $x_0 \in [0;10]$ , an der die lokale Änderungsrate von  $f$  mit der mittleren Änderungsrate von  $f$  im Intervall  $[0;10]$  übereinstimmt. Ermitteln Sie grafisch anhand von Abbildung 1 einen Näherungswert für  $x_0$ . 3
- c Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente  $t$  an  $G_f$  im Punkt  $(10 | f(10))$  und zeichnen Sie  $t$  für  $x \geq 10$  in Abbildung 1 ein. 4

(zur Kontrolle: Gleichung von  $t$ :  $y = -0,12x + 3$ )

- 2 Betrachtet wird die Schar der in  $\mathbb{R}$  definierten Funktionen  $g_k: x \mapsto 3x \cdot e^{kx}$  mit  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Der Graph jeder Funktion  $g_k$  der Schar hat genau einen Extrempunkt  $E_k$ . Abbildung 2 zeigt den Graphen  $G$  einer Funktion dieser Schar.

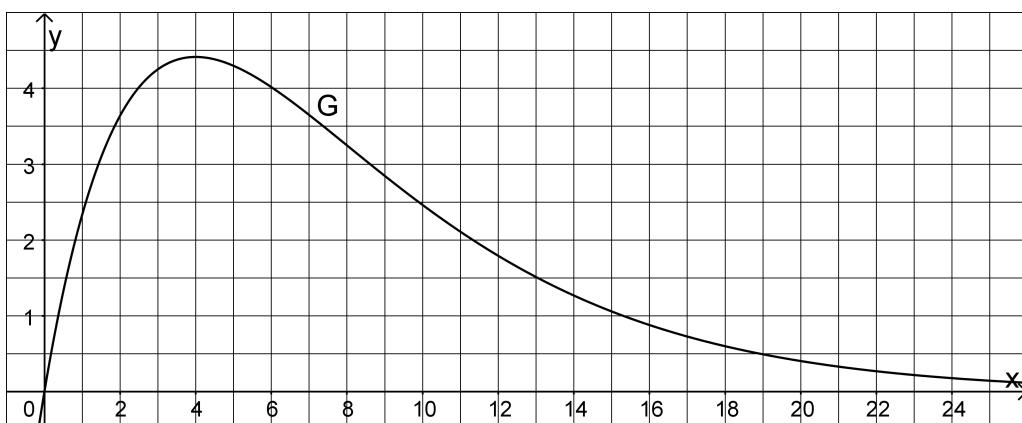


Abb. 2

- a Alle Extrempunkte  $E_k$  liegen auf der Geraden  $h$ . Bestimmen Sie rechnerisch die Steigung von  $h$ . 5
- Der Graph  $G$  besitzt den Hochpunkt  $(4 | \frac{12}{e})$ . 2
- b Begründen Sie, dass  $G$  der Graph der Funktion  $g_k$  mit  $k = -0,25$  ist. 2
- c Geben Sie alle Werte  $a \in \mathbb{R}$  an, für die die Gleichung  $3x \cdot e^{-0,25x} = a$  genau eine Lösung besitzt. 2

(Fortsetzung nächste Seite)

3 Junge Hunde wachsen in ihren ersten Lebensmonaten sehr schnell zu ausgewachsenen Hunden heran. Zur Beschreibung der Zunahme der Körpermasse eines Hundes einer bestimmten Rasse in den ersten 25 Lebensmonaten werden die folgenden beiden Modelle betrachtet:

- Für Modell A wird für  $0 \leq x \leq 10$  der Graph  $G_f$  aus Aufgabe 1 und für  $10 \leq x \leq 25$  die Tangente  $t$  (vgl. Aufgabe 1d) verwendet.

- Für Modell B wird für  $0 \leq x \leq 25$  der Graph  $G$  der Funktion  $g_{-0,25}$  aus Aufgabe 2 genutzt.

In beiden Modellen steht die x-Koordinate des jeweiligen Punkts auf den Graphen bzw. der Tangente für die Zeit in Monaten, die seit der Geburt des Hundes vergangen sind, und seine y-Koordinate für die momentane Änderungsrate der Körpermasse des Hundes in Kilogramm pro Monat. Dabei wird vereinfachend davon ausgegangen, dass jeder Monat 30 Tage hat.

- a Formulieren Sie eine Aussage im Sachzusammenhang, die für beide Modelle für  $x = 4$  zutrifft.

1

- b Berechnen Sie auf der Grundlage von Modell A, wie viele Monate nach der Geburt ein Hund der betrachteten Rasse erstmals nicht mehr an Körpermasse zunimmt.

2

(zur Kontrolle: 25 Monate)

- c Begründen Sie, dass auf der Grundlage von Modell A die Masse in Kilogramm, um die ein Hund der betrachteten Rasse in den ersten 25 Monaten nach seiner Geburt insgesamt

zunimmt, mit dem Term  $\int_0^{10} f(x) dx + 13,5$  berechnet werden kann.

3

- d Die Funktionen  $f$  und  $g_{-0,25}$ , die für die Modelle A bzw. B verwendet werden, stimmen im Bereich  $0 \leq x \leq 10$  nur für  $x = 0$  in ihren Funktionswerten überein. Zur Entwicklung weiterer Modelle sind in  $[0; 10]$  definierte Funktionen gesucht, deren Funktionswerte für  $x > 0$  zwischen den Funktionswerten von  $f$  und  $g_{-0,25}$  liegen. Geben Sie für zwei verschiedene solche Funktionen jeweils einen Funktionsterm an.

4

30

**Aufgabe B2 (Analysis)**

1 Gegeben ist die in  $\mathbb{R}$  definierte Funktion

$$f: x \mapsto -\frac{8}{27}x^3 + ax^2 \text{ mit } a \in \mathbb{R}. \text{ Die Nullstellen von } f \text{ sind}$$

0 und  $\frac{9}{4}$ . Abbildung 1 zeigt den Graphen  $G_f$  von  $f$ .

a Bestimmen Sie rechnerisch den Wert von  $a$ .

$$(\text{zur Kontrolle: } a = \frac{2}{3})$$

b Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das  $G_f$  im ersten Quadranten mit der  $x$ -Achse einschließt.

Die Tangente an  $G_f$  im Punkt  $(\frac{9}{4} | 0)$  wird mit  $t$  bezeichnet.

c Weisen Sie nach, dass  $t$  durch den Punkt  $(0 | \frac{27}{8})$

verläuft. Begründen Sie, dass der Inhalt des Flächenstücks, das  $G_f$  im ersten Quadranten mit  $t$  und der

$y$ -Achse einschließt, kleiner als  $\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{27}{8}$  ist.

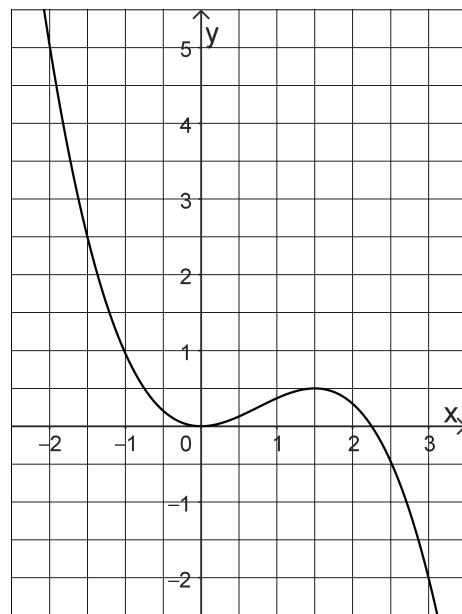


Abb. 1

d Eine in  $\mathbb{R}$  definierte ganzrationale Funktion  $g$  hat die folgenden Eigenschaften:

- $t$  ist Tangente an den Graphen von  $g$  im Punkt  $(\frac{9}{4} | 0)$ .
- Der Graph von  $g$  verläuft für  $0 < x < \frac{9}{4}$  oberhalb von  $t$ .

Geben Sie einen möglichen Term von  $g$  an.

2 In einer Messstation wird seit 1958 kontinuierlich die  $\text{CO}_2$ -Konzentration in der Luft gemessen, die in ppm (parts per million) angegeben wird. Die Tabelle gibt für die Jahre 1960, 1985 und 2010 jeweils den jährlichen Durchschnittswert der Messwerte an.

Jahr	1960	1985	2010
CO <sub>2</sub> -Konzentration	317 ppm	346 ppm	390 ppm

a Die jährlichen Durchschnittswerte haben sich im Zeitraum von 1960 bis 1985 in guter Näherung exponentiell entwickelt. Ermitteln Sie die zugehörige Wachstumsrate in Prozent.

$$(\text{zur Kontrolle: etwa } 0,35\%)$$

b Berechnen Sie unter der Annahme, dass sich das exponentielle Wachstum nach 1985 in gleicher Weise fortgesetzt hat, den jährlichen Durchschnittswert für das Jahr 2010.

Vergleichen Sie diesen Wert mit dem zugehörigen Wert aus der Tabelle und formulieren Sie das Ergebnis Ihres Vergleichs im Sachzusammenhang.

Innerhalb eines Jahres schwankt die  $\text{CO}_2$ -Konzentration. Für einen bestimmten Zeitraum von acht Monaten lassen sich die gemessenen Werte modellhaft durch die in  $\mathbb{R}$  definierte Funktion  $k: x \mapsto 3,3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) + 406$  beschreiben. Dabei ist  $x$  die in diesem Zeitraum vergangene Zeit in

Monaten und  $k(x)$  die  $\text{CO}_2$ -Konzentration in ppm. Vereinfachend wird davon ausgegangen, dass jeder Monat 30 Tage hat.

c Geben Sie an, wie der Graph von  $k$  schrittweise aus dem Graphen der in  $\mathbb{R}$  definierten Funktion  $s: x \mapsto \sin(x)$  hervorgeht. Beurteilen Sie, ob die Reihenfolge der einzelnen Schritte von Bedeutung ist.

(Fortsetzung nächste Seite)

- d Der durchschnittliche Funktionswert einer Funktion  $h$  im Intervall  $[a;b]$  kann mithilfe der folgenden Überlegung bestimmt werden:

*Schließt der Graph von  $h$  mit der  $x$ -Achse und den Geraden mit den Gleichungen  $x = a$  und  $x = b$  ein Flächenstück ein, so gibt es ein Rechteck der Länge  $b - a$ , das den gleichen Flächeninhalt wie das Flächenstück hat (vgl. Abbildung 2). Die Breite dieses Rechtecks stimmt mit dem Betrag des durchschnittlichen Funktionswerts von  $h$  im Intervall  $[a;b]$  überein.*

Bestimmen Sie für den betrachteten Zeitraum von acht Monaten die prozentuale Abweichung des Maximums der  $\text{CO}_2$ -Konzentration von der durchschnittlichen  $\text{CO}_2$ -Konzentration.

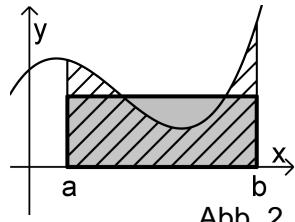


Abb. 2

**Aufgabe B3 (Stochastik)**

- 1 Bei einer Verkehrszählung zur Untersuchung des Sicherheitsbewusstseins im Straßenverkehr wurden 630 Radfahrer erfasst. Ein Drittel davon fuhr ein Fahrrad mit Elektromotor, 147 waren mit einem Fahrrad ohne Elektromotor unterwegs und trugen keinen Helm. Insgesamt trugen 40% der Radfahrer keinen Helm.

Aus den bei der Verkehrszählung erfassten Radfahrern wird eine Person zufällig ausgewählt.

Betrachtet werden die folgenden Ereignisse:

E: „Die Person fuhr ein Fahrrad mit Elektromotor.“

H: „Die Person trug einen Helm.“

- a Begründen Sie anhand der vorliegenden Daten, dass E und H stochastisch abhängig sind. 3
- b Beschreiben Sie das Ereignis  $\bar{E} \cap H$  im Sachzusammenhang und ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Person einen Helm trug, wenn bekannt ist, dass sie auf einem Fahrrad ohne Elektromotor unterwegs war. 3
- 2 Nach einer statistischen Erhebung eines Fahrradmagazins tritt auf einer 50 km langen, mit dem Fahrrad zurückgelegten Strecke mit einer Wahrscheinlichkeit von 1,6% eine Reifenpanne auf. Ermitteln Sie auf 50 km genau, ab welcher mit dem Fahrrad zurückgelegten Gesamtstrecke unter diesen Voraussetzungen die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eine Reifenpanne auftritt, mehr als 90% beträgt. 5
- 3 Im Jahr 2020 wurden in Deutschland rund fünf Millionen Fahrräder verkauft. Dabei waren 40% der verkauften Fahrräder Pedelecs (unterstützende Elektrofahrräder). Unter allen im Jahr 2020 verkauften Fahrrädern werden 200 zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Pedelecs unter den 200 zufällig ausgewählten Fahrrädern.
- a Bestimmen Sie  $P(70 \leq X \leq 90)$  und beschreiben Sie die Bedeutung des Terms im Sachzusammenhang. 3
- Aufgrund der hohen Anschaffungskosten wurde für jedes vierte im Jahr 2020 verkaufte Pedelec eine Versicherung abgeschlossen. Die Zufallsgröße Y beschreibt die Anzahl der Pedelecs unter den 200 zufällig ausgewählten Fahrrädern, für die eine Versicherung abgeschlossen wurde.
- b Berechnen Sie  $P(Y = 0)$ . 2
- c Ermitteln Sie den größtmöglichen Wert von k, für den  $P_{0,1}^{200}(Y \geq k) > 0,8$  gilt, und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang. 4

**Aufgabe B4 (Stochastik)**

Die Bigband einer Schule nimmt anlässlich des 50-jährigen Jubiläums der Schule eine CD mit zehn Musikstücken auf; vier dieser Stücke sind kurz, sechs lang. Diese CD wird in großer Anzahl hergestellt.

- 1 Bei der Jubiläumsfeier werden von einer dieser CDs in zufälliger Reihenfolge Stücke abgespielt, wobei jedes Stück mehrfach abgespielt werden kann. 4

Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter zwölf abgespielten Stücken

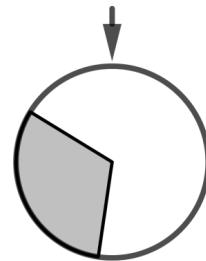
- genau fünf lange Stücke befinden.
- mehr lange als kurze Stücke befinden.

- 2 Als die CDs vor der Jubiläumsfeier geliefert wurden, entdeckten die Mitglieder der Bigband unter den ersten 20 betrachteten CDs ein Exemplar mit fehlerhafter Hülle und befürchteten, dass mehr als 5 % aller Hölle fehlerhaft sind. Sie planten deshalb, die Nullhypothese „Der Anteil der fehlerhaften Hölle beträgt höchstens 5 %.“ mithilfe einer Stichprobe von 150 CDs auf einem Signifikanzniveau von 10 % zu testen. Sollte das Ergebnis des Tests dafür sprechen, dass die Befürchtung zutrifft, wollten sie beim Hersteller einen Preisanlass verlangen.

- a Begründen Sie, dass die Nullhypothese genau dann abgelehnt wird, wenn mindestens zwölf Hölle fehlerhaft sind. 3

- b Beschreiben Sie die Bedeutung des Fehlers zweiter Art im Sachzusammenhang und ermitteln Sie den Bereich, in dem der tatsächliche Anteil fehlerhafter Hölle liegen müsste, damit die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art kleiner als 25 % ist. 6

- 3 Bei der Jubiläumsfeier können die CDs sowohl zu einem Preis von 9 Euro pro Stück gekauft als auch bei einem Spiel gewonnen werden. Für das Spiel wird ein Glücksrad mit einem grauen und einem weißen Sektor verwendet (vgl. Abbildung). Für einen Einsatz von einem Euro wird das Glücksrad dreimal gedreht. Nur wenn dabei genau zweimal der grau markierte Sektor getroffen wird, erhält man eine CD. Die Größe des Öffnungswinkels des grauen Sektors im Bogenmaß wird mit  $b$  bezeichnet.



- a Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, bei diesem Spiel eine CD zu erhalten, mithilfe des Terms  $\frac{3}{4\pi^2}b^2 - \frac{3}{8\pi^3}b^3$  berechnet werden kann. 4

- b Es gibt Werte von  $b$ , für die die Bigband bei vielfacher Durchführung des Spiels im Mittel pro CD die gleichen Einnahmen erwarten könnte wie beim Verkauf der CD. Geben Sie eine Gleichung an, mit der diese Werte von  $b$  berechnet werden könnten. 3

**Aufgabe B5 (Geometrie)**

BE

Gegeben sind die Punkte  $A(17|-10|0)$ ,  $B(17|20|0)$ ,  $C(2|4|8)$  und  $D(2|-10|8)$ . Es gilt  $AB \parallel CD$ , somit ist das Viereck ABCD ein Trapez.

a Zeigen Sie, dass das Trapez ABCD bei D einen rechten Innenwinkel hat. 2

b Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Trapezes ABCD. 3

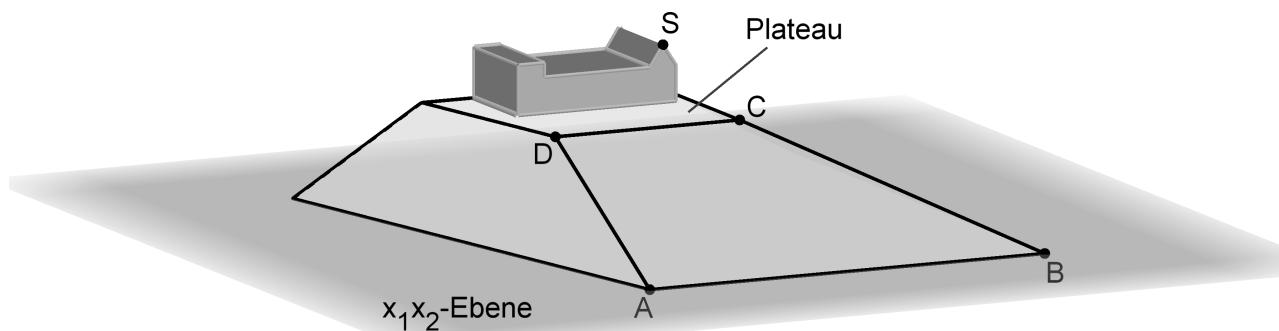
(zur Kontrolle: 374)

Das Trapez ABCD liegt in der Ebene H.

c Bestimmen Sie eine Gleichung von H in Koordinatenform. 3

(zur Kontrolle:  $H : 8x_1 + 15x_3 - 136 = 0$ )

In einem Modell stellt die  $x_1x_2$ -Ebene die horizontale Grundfläche dar, auf der sich ein Hügel erhebt. Ein Hang des Hügels wird durch das Trapez ABCD dargestellt. Auf einem parallel zur Grundfläche verlaufenden Plateau, das durch ein Viereck mit C und D als Eckpunkten beschrieben wird, steht eine Burg. Die höchste Stelle der vorderen Fassade der Burg wird dabei durch den Punkt  $S(-6|2|12)$  dargestellt (vgl. Abbildung). Eine Längeneinheit entspricht 10 m in der Realität.



d Bestimmen Sie die Höhe der vorderen Burgfassade an ihrer höchsten Stelle in Metern. 2

e Der durch das Trapez ABCD beschriebene Hang wird auf seiner gesamten Fläche für den Weinanbau genutzt. Berechnen Sie den Inhalt der Weinanbaufläche des Hangs in Hektar und untersuchen Sie mithilfe der folgenden Tabelle, um welche Art von Weinanbaulage es sich handelt. 5

Art der Weinanbaulage	Größe des Neigungswinkels des Hangs gegenüber der horizontalen Grundfläche
Flachlage	$0^\circ$ bis $3^\circ$
Hanglage	$3^\circ$ bis $17^\circ$
Steillage	$17^\circ$ oder mehr

f Bei der Weinlese steht ein Arbeiter auf dem Hang an einer Stelle, die durch den Punkt  $P(5,75|-2,5|6)$  beschrieben wird. Er stellt sich dort auf seine Zehenspitzen und versucht, aus einer Blickhöhe von zwei Metern die Burg zu sehen. Beurteilen Sie, ob der Hang dabei die freie Sicht auf die höchste Stelle der vorderen Fassade der Burg verhindert. 5

20

### Aufgabe B6 (Geometrie)

Gegeben sind die Punkte  $A(5|-5|12)$ ,  $B(5|5|12)$  und  $C(-5|5|12)$ .

- a Begründen Sie, dass A, B und C Eckpunkte eines Quadrats sein können, und geben Sie die Koordinaten des vierten Eckpunkts D dieses Quadrats an.

Im Folgenden wird die Doppelpyramide in Abbildung 1 betrachtet. Die beiden Teilpyramiden ABCDS und ABCDT sind gleich hoch. Der Punkt T liegt im Koordinatenursprung, der Punkt S ebenfalls auf der z-Achse.

Die Seitenfläche BCT liegt in einer Ebene E.

- b Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.

(zur Kontrolle:  $E: 12y - 5z = 0$ )

- c Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den die Seitenfläche BCT mit der Fläche ABCD einschließt.

E gehört zur Schar der Ebenen  $E_k : ky - 5z = 5k - 60$  mit  $k \in \mathbb{R}$ . Die Strecke BC liegt auf jeder Ebene dieser Schar.

- d Ermitteln Sie diejenigen Werte von k, für die  $E_k$  mit der Seitenfläche ADS mindestens einen Punkt gemeinsam hat.

- e Die Seitenfläche ADT liegt in der Ebene F. Geben Sie einen Normalenvektor von F an und begründen Sie Ihre Angabe, ohne die Koordinaten von A und D zu verwenden. Bestimmen Sie denjenigen Wert von k, für den  $E_k$  senkrecht zu F steht.

- f Die Doppelpyramide wird so um die x-Achse gedreht, dass die Seitenfläche BCT in eine Fläche übergeht, die in der xy-Ebene liegt, und der Punkt S in einen Punkt  $S'$ , der eine positive y-Koordinate hat. Abbildung 2 zeigt jeweils einen Längsschnitt der Doppelpyramide durch die yz-Ebene vor und nach dieser Drehung.

Begründen Sie anhand geeigneter Eintragungen in Abbildung 2, dass die y-Koordinate von  $S'$  den Wert  $24 \cdot \sin \varphi$  hat, wobei  $\varphi$  die in Aufgabe c bestimmte Winkelgröße ist.

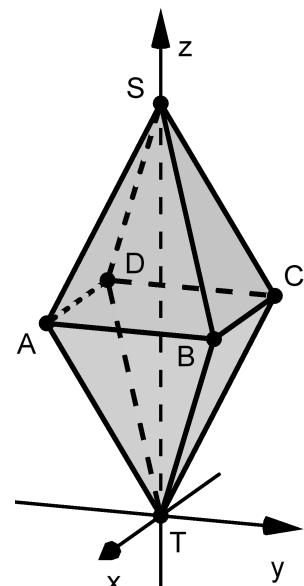


Abb. 1

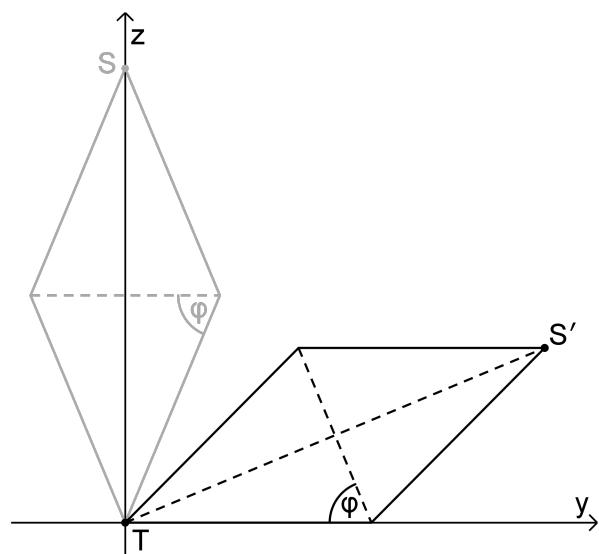


Abb. 2

BE

4

3

4

2

20