5503

Rühler

Mathematik

Abiturprüfung 2025

Prüfungsteil A

Arbeitszeit: 90 Minuten

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **keine Hilfsmittel** verwendet werden, mit Ausnahme eines Rechtschreibwörterbuchs Deutsch, das nach Erklärung des Verlags die aktuellen amtlichen Regeln vollständig umsetzt.

Zu den Themengebieten Analysis, Stochastik und Geometrie wählt der Fachausschuss jeweils eine Aufgabengruppe zur Bearbeitung aus. **Die zu einer Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil A dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.**

Name des Prüflings

Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.

Analysis

Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

1 Gegeben ist die in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definierte Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{x^2} + 1$.

2 **a)** Geben Sie eine Gleichung der senkrechten und eine Gleichung der waagerechten Asymptote des Graphen von f an.

3 **b)** Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_1^2 f(x)\,dx$.

5 **2** Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $g: x \mapsto x^2 - e^x$. Der Graph von g besitzt genau einen Wendepunkt W. Bestimmen Sie rechnerisch die x-Koordinate von W und beurteilen Sie, ob W oberhalb der x-Achse liegt.

3 Abbildung 1 zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot \cos(x)$.

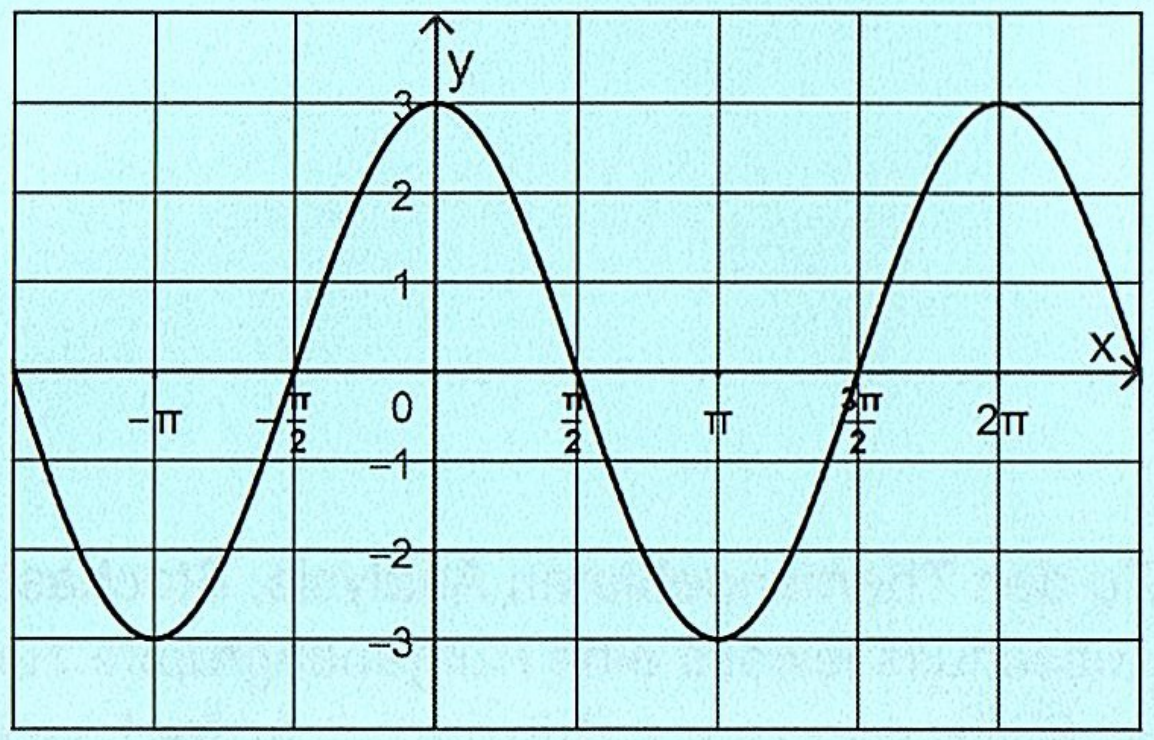


Abb. 1

1 **a)** Geben Sie den Wert des Integrals $\int_0^{\pi} f(x)\,dx$ an.

4 **b)** Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion g ist gegeben durch $g(x) = a \cdot f(x) + b \cdot x$ mit reellen Zahlen a und b. Die Punkte $(0 \mid -3)$ und $\left(\frac{\pi}{2} \mid \frac{3}{4}\pi\right)$ liegen auf dem Graphen von g. Ermitteln Sie a und b.

(Fortsetzung nächste Seite)

5 **4** Gegeben sind die in $\mathbb{R}_0^+$ definierten Funktionen f und g, wobei g die Umkehrfunktion von f ist. Abbildung 2 zeigt die Graphen G_f von f und G_g von g. G_f und G_g schneiden sich nur im Koordinatenursprung und im Punkt $(x_S \mid f(x_S))$. Beurteilen Sie die folgende Aussage:

$$\int_0^{x_S} (g(x) - f(x))\,dx = 2 \cdot \int_0^{x_S} (x - f(x))\,dx$$

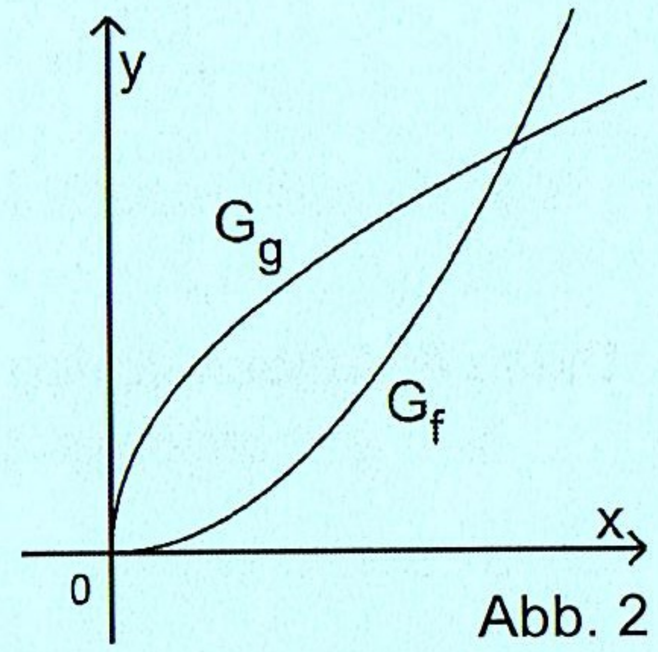


Abb. 2

20

Analysis

Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

1 Gegeben ist die in IR definierte Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 1$.

2 **a)** Zeichnen Sie den Graphen von f für $-3 \leq x \leq 3$ in ein Koordinatensystem ein.

3 **b)** Es gibt genau eine positive reelle Zahl a, für die das Integral $\int_0^a f(x)\,dx$ den Wert 0 hat. Berechnen Sie a.

2 Betrachtet wird eine in IR definierte ganzrationale Funktion g.

2 **a)** Beschreiben Sie, wie man rechnerisch nachweisen kann, dass 2 eine Wendestelle von g ist.

3 **b)** Der Punkt $(2\,|\,3)$ ist der einzige Wendepunkt des Graphen von g. Die in IR definierte Funktion h ist gegeben durch $h(x) = g(2x) - 1$.
Geben Sie die Koordinaten des Wendepunkts des Graphen von h an und begründen Sie Ihre Angabe.

(Fortsetzung nächste Seite)

3 Gegeben ist die in IR definierte Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x$.

2 **a)** Für die zweite Ableitungsfunktion von f gilt $f''(2) \neq 0$. Zeigen Sie, dass 2 eine Extremstelle von f ist.

3 **b)** Einer der Graphen I und II in Abbildung 1 ist der Graph einer Stammfunktion von f. Geben Sie diesen Graphen an und begründen Sie Ihre Angabe.

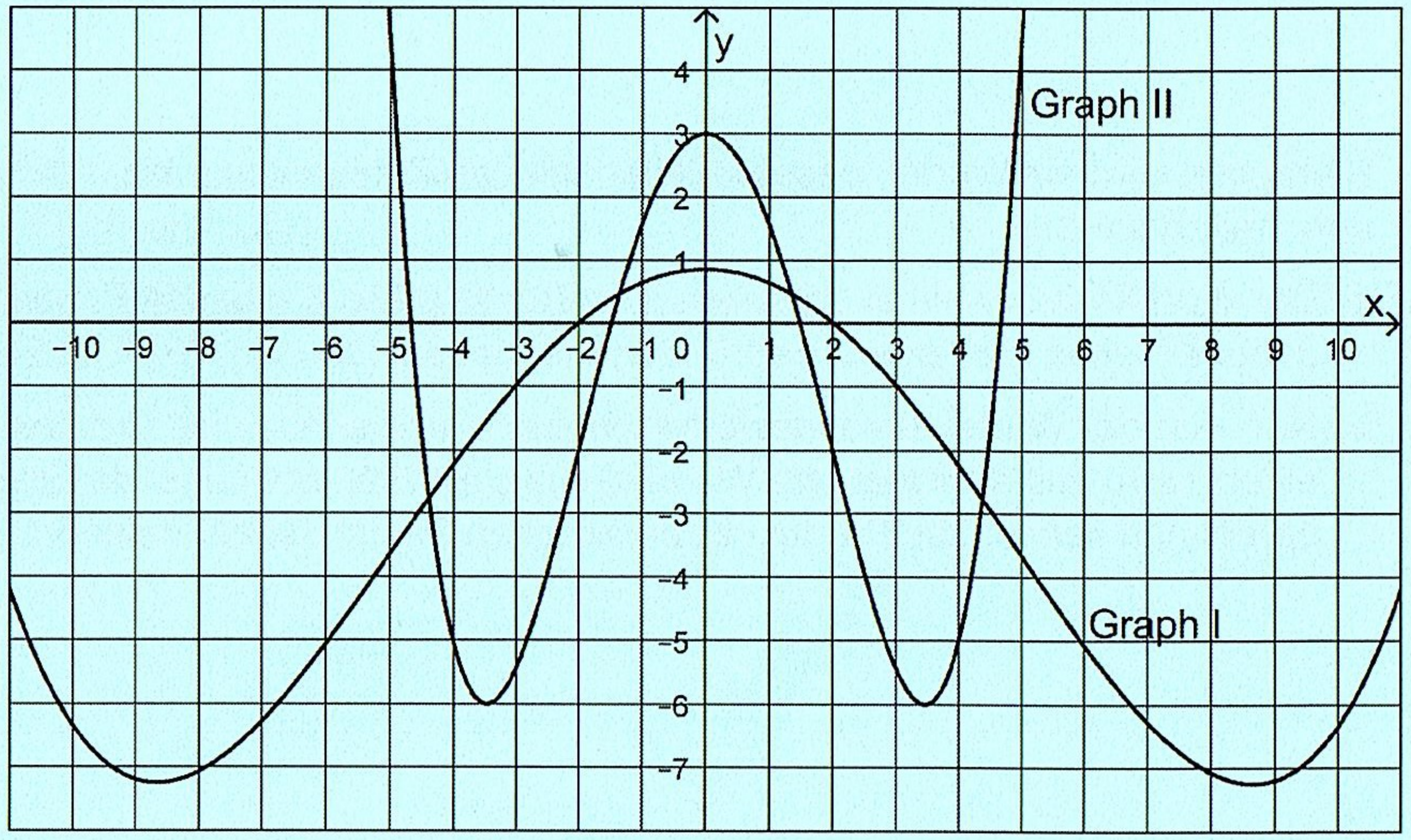


Abb. 1

4 Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto \sqrt{x-2}$ mit $x \in [2; +\infty[$.
Abbildung 2 zeigt den Graphen G von g sowie den Punkt $P(3\,|\,1)$. Die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ ist die Tangente an G im Punkt P und hat mit G nur den Punkt P gemeinsam.

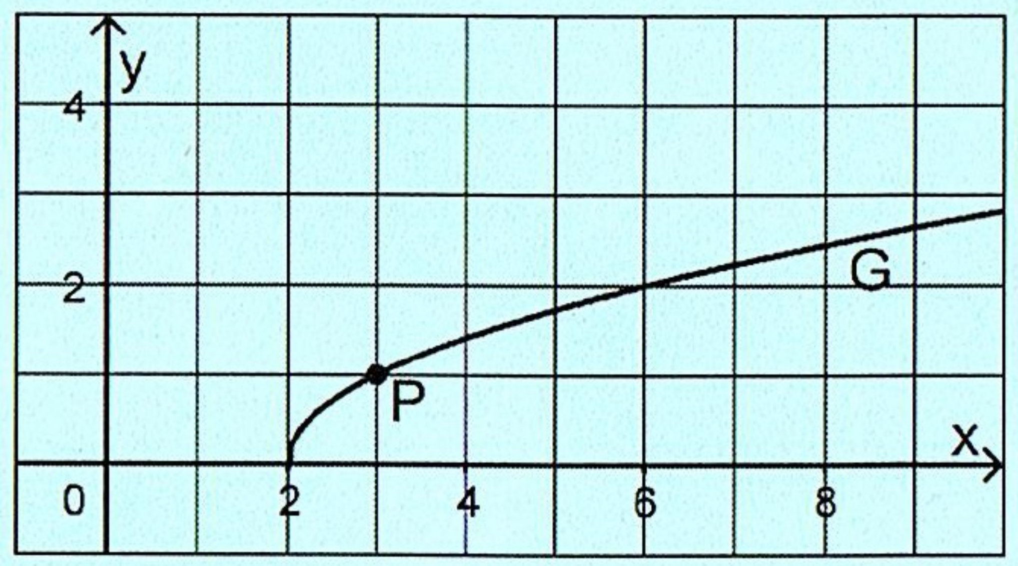


Abb. 2

1 **a)** Zeichnen Sie die Tangente in Abbildung 2 ein.

4 **b)** Betrachtet wird eine Gerade, die mit G sowohl den Punkt P als auch einen weiteren Punkt gemeinsam hat. Geben Sie alle möglichen Steigungen dieser Gerade an.

20

Stochastik

Aufgabengruppe 1 und Aufgabengruppe 2

BE

Betrachtet wird ein Würfel, dessen Seiten mit den Zahlen von 1 bis 6 durchnummeriert sind.

2 **a)** Der Würfel wird zweimal geworfen. Die Zufallsgröße X gibt das Produkt der dabei erzielten Zahlen an. Begründen Sie, dass $P(X=10)=P(X=15)$ gilt.

3 **b)** Nun wird der Würfel n-mal geworfen, wobei n größer als 2 ist. Ermitteln Sie einen Term, mit dem man die Wahrscheinlichkeit für das folgende Ereignis berechnen kann: „Das Produkt der n erzielten Zahlen ist 2, 3 oder 5.“

5

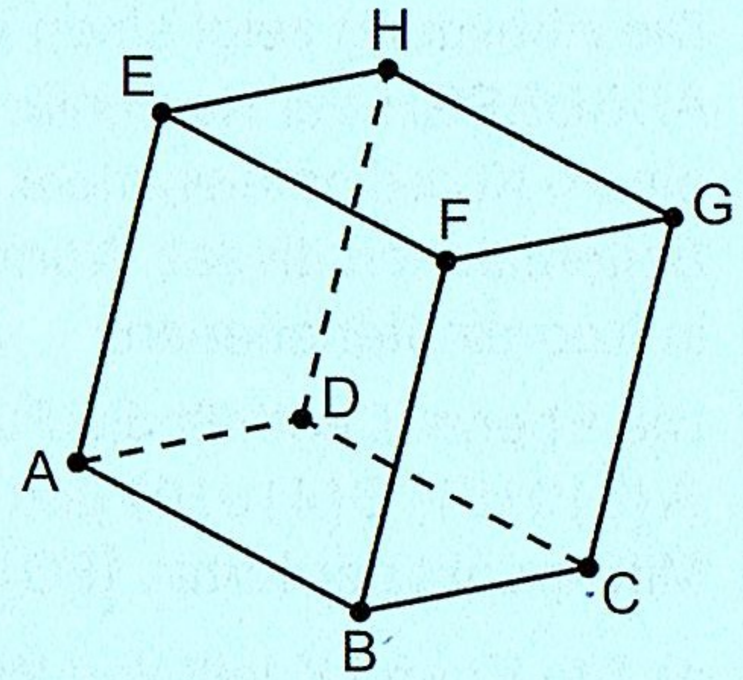
Geometrie

Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

Die Abbildung zeigt den Würfel ABCDEFGH mit $A(3|2|-1)$ und $E(1|1|1)$.



2 **a)** Zeigen Sie, dass der Würfel die Kantenlänge 3 besitzt.

3 **b)** Der Punkt S liegt so auf der Strecke $[AE]$, dass die Pyramide ABCDS das Volumen 3 hat. Bestimmen Sie die Koordinaten von S.

5

Geometrie

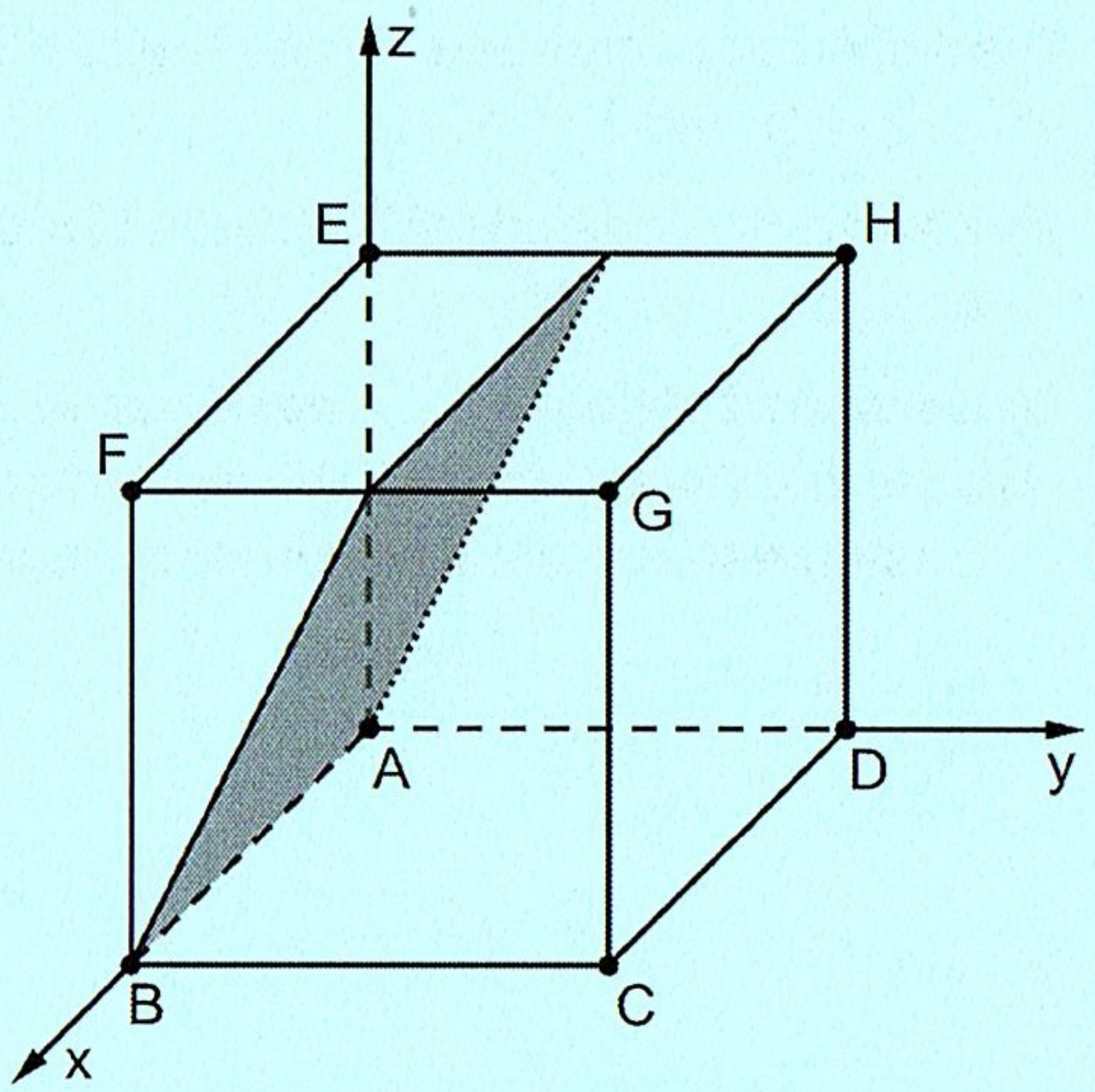
Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

Die Abbildung zeigt einen Würfel ABCDEFGH der Kantenlänge 4 in einem Koordinatensystem. Drei Seitenflächen dieses Würfels liegen in Koordinatenebenen.

Die Ebene K enthält die Punkte $A(0|0|0)$, $B(4|0|0)$ und den Mittelpunkt der Kante $[FG]$.



2 **a)** Die Ebene K teilt den Würfel in zwei Teilkörper. Berechnen Sie das Volumen des kleineren Teilkörpers.

3 **b)** Eine zweite Ebene L enthält die Punkte E und F sowie den Mittelpunkt der Kante $[BC]$.

Zeichnen Sie die Schnittfigur dieser Ebene mit dem Würfel in die Abbildung ein und geben Sie eine Gleichung der Schnittgerade der Ebenen K und L an.

5

5503 (Richter

Mathematik

Abiturprüfung 2025

Prüfungsteil B

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen als Hilfsmittel verwendet werden

- die vom Staatsministerium genehmigte Merkhilfe für das Fach Mathematik,
- eine der vom Staatsministerium zugelassenen stochastischen Tabellen,
- eine der vom Staatsministerium für Leistungserhebungen zugelassenen naturwissenschaftlichen Formelsammlungen,
- ein Taschenrechner, der den vom Staatsministerium getroffenen Regelungen entspricht,
- ein Rechtschreibwörterbuch Deutsch, das nach Erklärung des Verlags die aktuellen amtlichen Regeln vollständig umsetzt.

Zu den Themengebieten Analysis, Stochastik und Geometrie wählt der Fachausschuss jeweils eine Aufgabengruppe zur Bearbeitung aus. **Die zu einer Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil A bearbeitet werden.**

Name des Prüflings

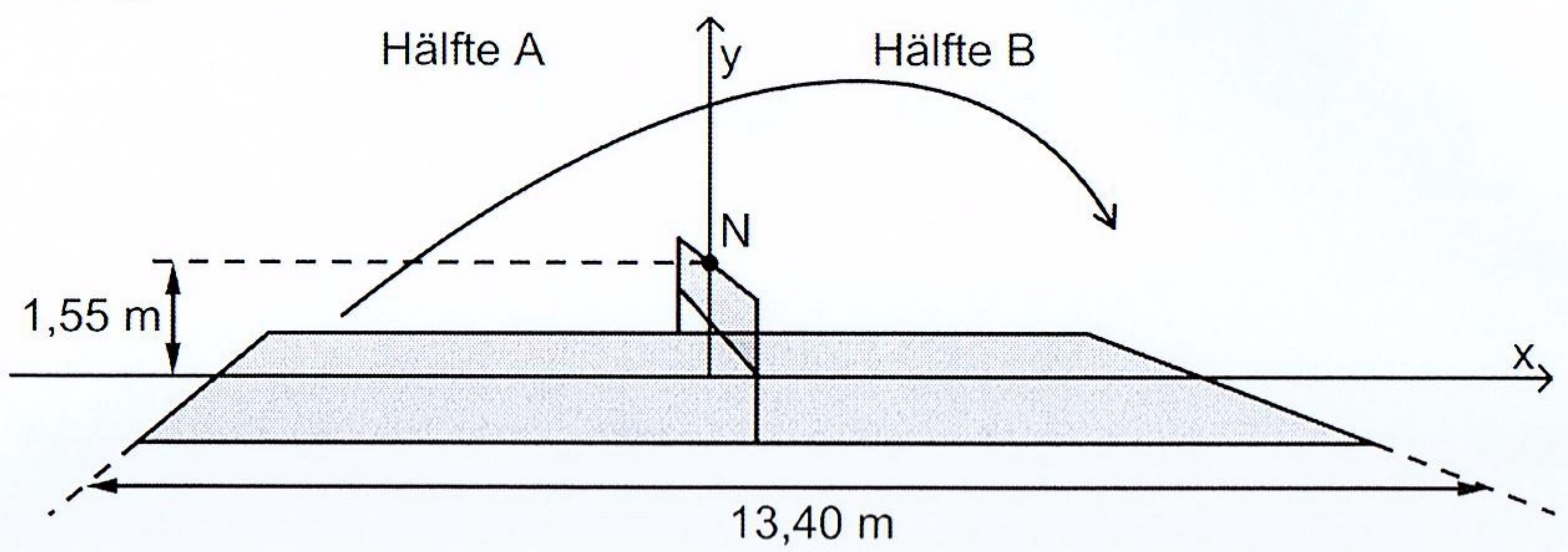
Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.

Analysis

Aufgabengruppe 1

BE

Badminton wird auf einem rechteckigen Spielfeld gespielt, das 13,40 m lang ist. Dabei wird ein Federball über ein 1,55 m hohes Netz geschlagen (vgl. Abbildung).



Im Folgenden werden Flugbahnen von Federbällen, die von Hälfte A in Hälfte B des Spielfelds geschlagen werden, modellhaft mithilfe von Funktionen beschrieben. Vereinfachend werden nur Flugbahnen betrachtet, die innerhalb einer Ebene verlaufen, die senkrecht zum horizontalen Boden und parallel zur Seitenlinie des Spielfelds ist. Das im Modell verwendete Koordinatensystem liegt in dieser Ebene, wobei die x-Achse den Boden und der Punkt $N(0\,|\,1{,}55)$ die horizontal verlaufende Oberkante des Netzes beschreibt. Eine Längeneinheit entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.

1 Die in $]-\infty;6]$ definierte Funktion $f: x \mapsto 0{,}25 \cdot (x+6) \cdot \sqrt{6-x}$ beschreibt für $-5 \le x \le 6$ die Flugbahn bei einem bestimmten Schlag.

2 **a)** Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts des Graphen von f mit der y-Achse an und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

4 **b)** Begründen Sie, dass der Federball bei diesem Schlag innerhalb von Hälfte B auf dem Boden auftrifft, wenn die Flugbahn nicht unterbrochen wird. Ein Spieler steht 3 m hinter dem Netz in Hälfte B unterhalb der Flugbahn des Federballs. Berechnen Sie die Höhe des Federballs über dem Boden an dieser Stelle.

6 **c)** Weisen Sie nach, dass $\frac{6-3x}{8 \cdot \sqrt{6-x}}$ ein Term der ersten Ableitungsfunktion f' von f ist. Ermitteln Sie $\lim\limits_{x \to 6} f'(x)$ und deuten Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

2 **d)** Im Verlauf des Flugs erreicht der Federball eine maximale Höhe. Berechnen Sie diese.

(Fortsetzung nächste Seite)

2 Bei einem anderen Schlag wird die Flugbahn des Federballs für $-0{,}25 \le x \le 1$ mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $g: x \mapsto -2x+2$ beschrieben.

5 **a)** Zeigen Sie unter Verwendung einer geeigneten Skizze, dass die Entfernung eines beliebigen Punkts $Q(x\,|\,g(x))$ auf dem Graphen von g zum Punkt $N(0\,|\,1{,}55)$ durch den Term $d(x) = \sqrt{5x^2 - 1{,}8x + 0{,}2025}$ beschrieben werden kann.

3 **b)** Auf dieser Flugbahn gibt es einen Punkt mit minimalem Abstand zur oberen Netzkante. Berechnen Sie diesen minimalen Abstand.

3 Im Folgenden werden Schläge betrachtet, bei denen die Flugbahn des Federballs jeweils mithilfe einer Funktion $h: x \mapsto a \cdot \sqrt{b-x} + c$ mit maximalem Definitionsbereich und $a, b, c \in \mathbb{R}$ beschrieben wird.

4 **a)** Ermitteln Sie für $a = 2$, $b = 5$ und $c = -2$, in welcher Entfernung zur Netzebene und unter welchem Winkel der Federball auf dem Boden auftrifft.

4 **b)** Ein Federball wird von einem Spieler in Hälfte A im Abstand von 1 m zur Netzebene in einer Höhe von 2,60 m geschlagen und trifft im Abstand von 3 m zur Netzebene in Hälfte B senkrecht zum Boden auf diesem auf. Ermitteln Sie die zugehörigen Werte von a, b und c.

30

Analysis

Aufgabengruppe 2

BE

1 Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: x \mapsto 5x \cdot e^{-x}$. Abbildung 1 zeigt den Graphen G von f.

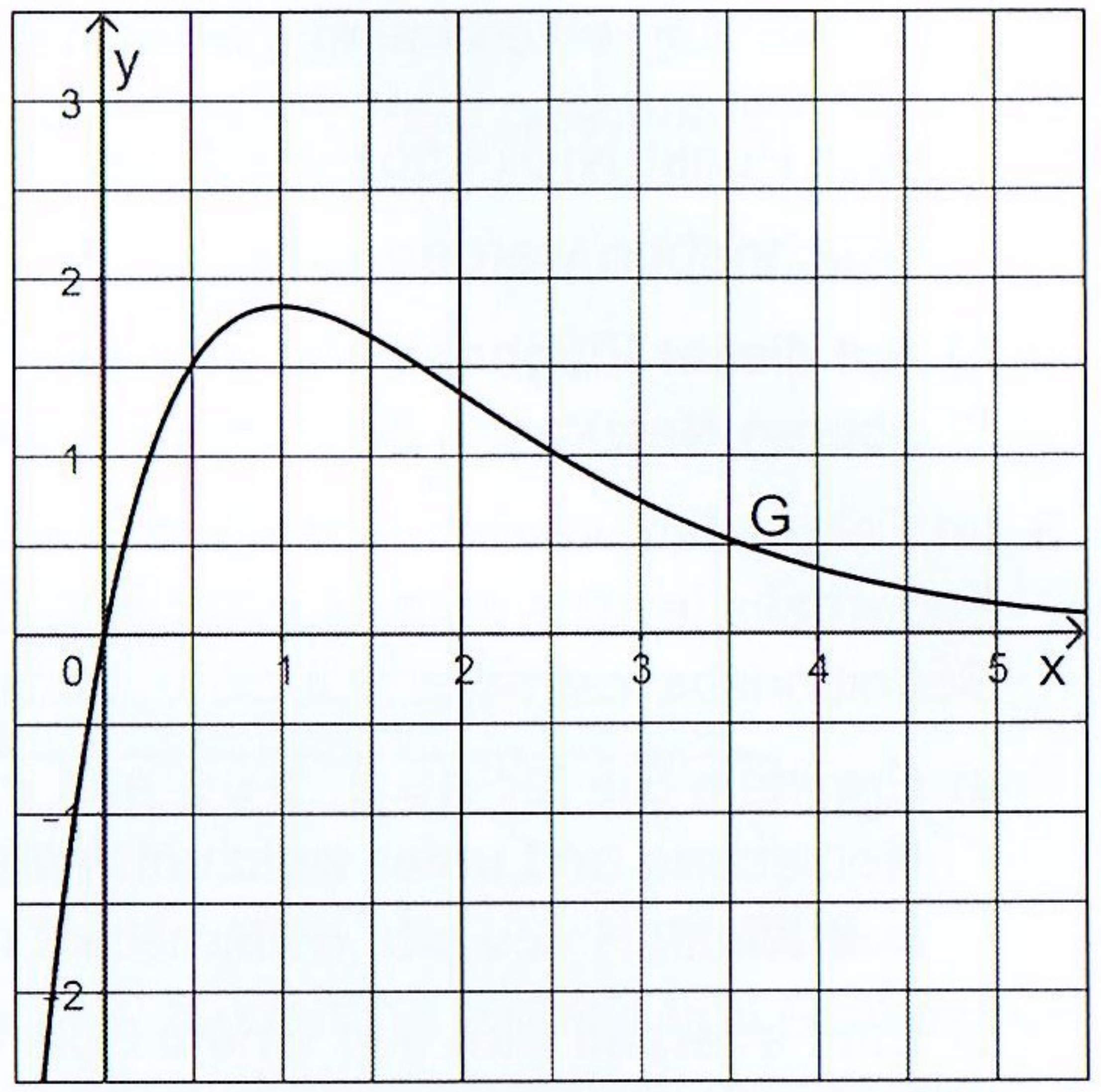


Abb. 1

4 **a)** G hat genau einen Extrempunkt. Berechnen Sie die Koordinaten des Extrempunkts von G.

(zur Kontrolle: $\left(1 \mid \frac{5}{e}\right)$)

3 **b)** Die Tangente t an G in dessen Wendepunkt hat die Gleichung $y = -\frac{5}{e^2}x + \frac{20}{e^2}$. Ermitteln Sie eine Gleichung der Gerade, die den Extrempunkt von G enthält und senkrecht zu t verläuft.

Betrachtet wird die in $[1;+\infty[$ definierte Funktion h mit $h(x) = f(x)$.

6 **c)** Begründen Sie, dass die Funktion f nicht umkehrbar, die Funktion h jedoch umkehrbar ist. Geben Sie den Definitions- und den Wertebereich der Umkehrfunktion von h an.

Abbildung 2 zeigt eine Figur, die modellhaft das Wappen eines Sportvereins beschreibt. Die Begrenzungslinien der Figur werden durch einen Teil der Gerade mit der Gleichung $y = 5$ sowie durch die Kurvenstücke H_1 und H_2 beschrieben:

- H_1 entsteht, indem G für $x \in [\ln 5; 5]$ an der Gerade mit der Gleichung $y = x$ gespiegelt wird.
- H_2 entsteht durch Spiegeln von H_1 an der Gerade mit der Gleichung $x = \ln 5$.

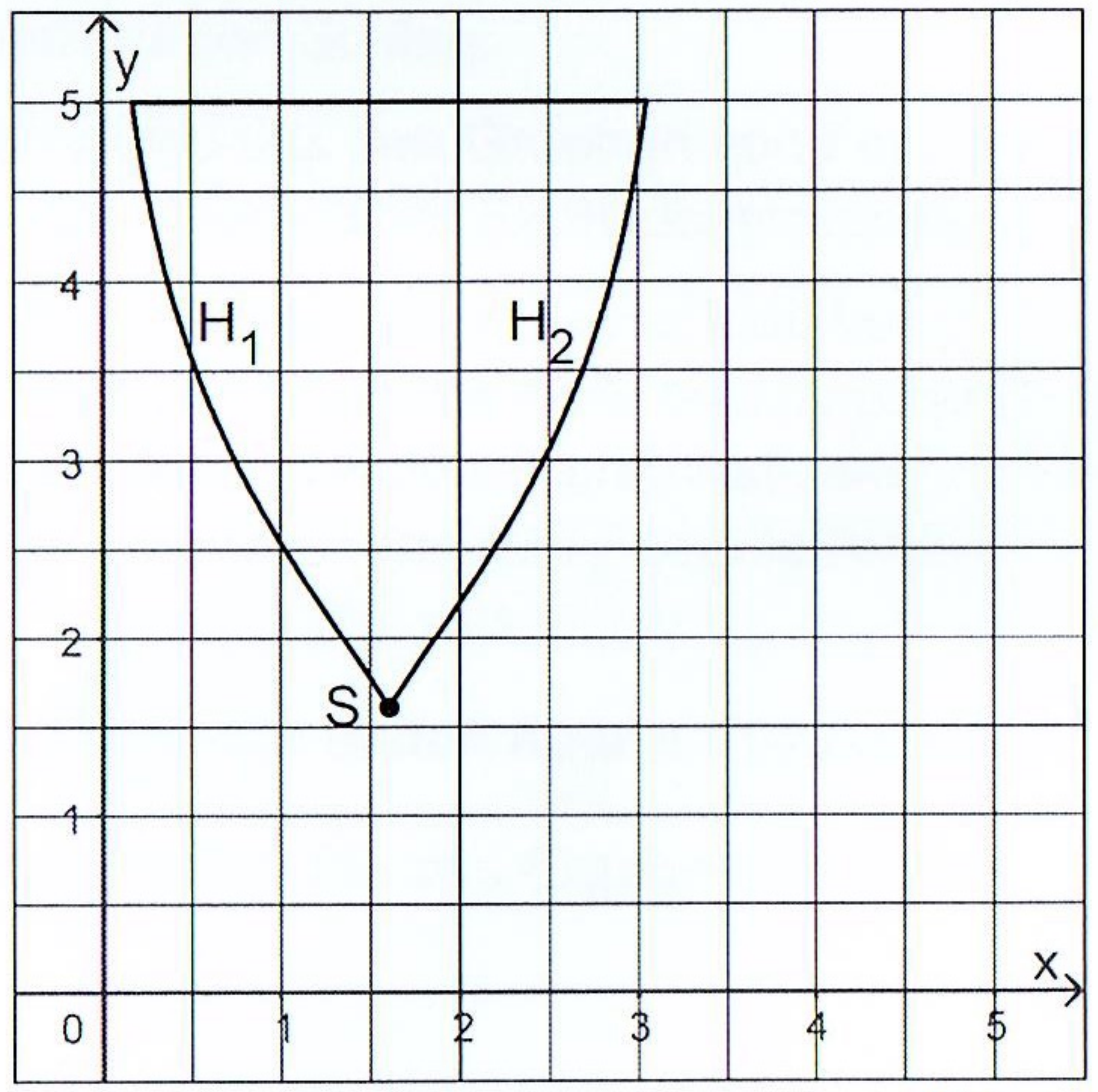


Abb. 2

Der Punkt $S(\ln 5 \mid \ln 5)$ ist gemeinsamer Punkt von H_1 und H_2.

(Fortsetzung nächste Seite)

5 **d)** Begründen Sie, dass mit dem Term $2 \cdot \left((5 - \ln 5) \cdot \ln 5 - \int_{\ln 5}^{5} f(x)\,dx \right)$ der Flächeninhalt der Figur berechnet werden kann.

3 **e)** Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $F: x \mapsto -5(x+1) \cdot e^{-x}$ ist eine Stammfunktion von f. Berechnen Sie mit dem Term aus Aufgabe 1d den Flächeninhalt der Figur auf eine Nachkommastelle genau.

2 Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $g_k: x \mapsto -5x \cdot e^{-kx}$ mit $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Abbildung 3 zeigt vier Graphen der Schar, die zu den Werten $k = -1$, $k = -0{,}5$, $k = 0{,}5$ und $k = 1$ gehören.

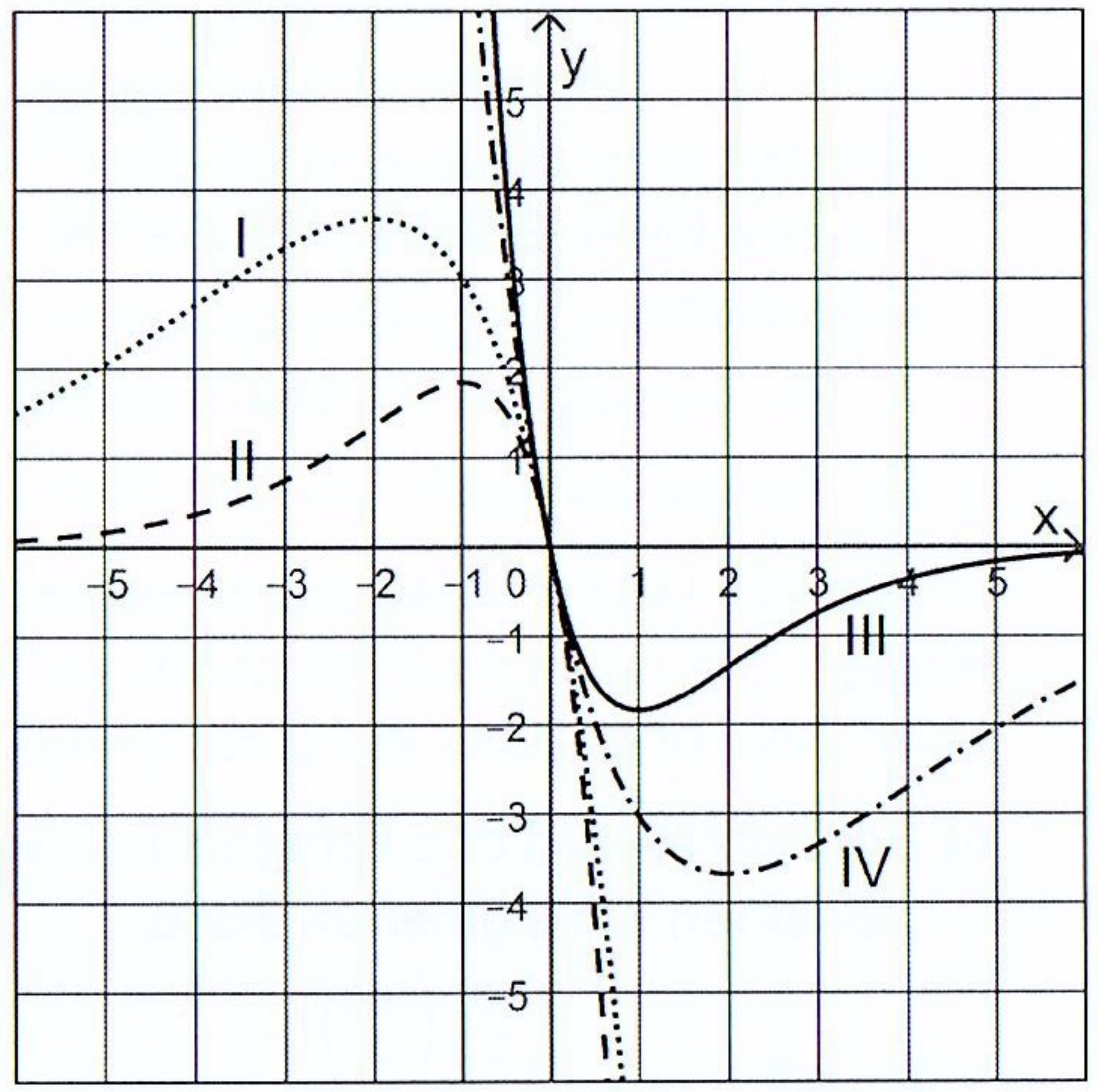


Abb. 3

5 **a)** Der Graph III kann durch Spiegeln von G (vgl. Abbildung 1) an der x-Achse erzeugt werden. Geben Sie den zugehörigen Wert von k sowie die Koordinaten des Tiefpunkts von Graph III an. Ordnen Sie den drei übrigen Werten von k den jeweils passenden Graphen zu.

4 **b)** Zeigen Sie, dass $g_k(-x) = -g_{-k}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, und interpretieren Sie diese Gleichung mit Blick auf die Graphen der Funktionen g_k und g_{-k}.

30

Stochastik

Aufgabengruppe 1

BE

Eine traditionsreiche Kleinkunstbühne bietet verschiedene Veranstaltungen an.

1 An einem Kabarettabend sind 200 Gäste anwesend.

3 **a)** In der Pause bestellen erfahrungsgemäß 65 % der Gäste einen Brotzeitteller. Es soll angenommen werden, dass die Anzahl der bestellten Brotzeitteller durch eine binomialverteilte Zufallsgröße X beschrieben werden kann. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A: „Es werden genau 130 Brotzeitteller bestellt.“

B: „Es werden mehr als 140 Brotzeitteller bestellt.“

40 der 200 Gäste sind Inhaber eines Abonnements. Unter allen Gästen werden fünf signierte Bücher des auftretenden Kabarettisten verlost, wobei jeder Gast höchstens ein Buch gewinnen kann.

3 **b)** Betrachtet wird das Ereignis E: „Genau zwei Inhaber eines Abonnements gewinnen ein signiertes Buch.“.

Es gilt $P(E)=\frac{\binom{40}{2}\cdot\binom{160}{3}}{\binom{200}{5}}$.

Geben Sie $P(E)$ in Prozent an. Übertragen Sie das beschriebene Zufallsexperiment der Verlosung und das Ereignis E in ein passendes Urnenmodell.

3 **c)** Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zwei Inhaber eines Abonnements unter den Gewinnern sind.

2 **d)** Die fünf Bücher werden nacheinander verlost. Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term $\frac{40}{200}\cdot\frac{160}{199}\cdot\frac{39}{198}\cdot\frac{159}{197}\cdot\frac{158}{196}$ berechnet werden kann.

(Fortsetzung nächste Seite)

2 Die Karten für die Veranstaltungen der Kleinkunstbühne können entweder im Verkaufsbüro oder im Internet erworben werden. 90 % der Kartenkäufe im Internet und 35 % der Kartenkäufe im Verkaufsbüro werden von Personen getätigt, die jünger als 60 Jahre sind. Insgesamt werden 54 % der Kartenkäufe von Personen getätigt, die mindestens 60 Jahre alt sind.

Ein Kartenkauf wird zufällig ausgewählt. Betrachtet werden folgende Ereignisse:

J: „Der Kauf wurde von einer Person getätigt, die jünger als 60 Jahre ist.“

V: „Der Kauf wurde im Verkaufsbüro getätigt.“

1 **a)** Beschreiben Sie im Sachzusammenhang das Ereignis $\overline{J}\cap\overline{V}$.

5 **b)** Ermitteln Sie, z. B. mithilfe eines Baumdiagramms, die Wahrscheinlichkeit p dafür, dass der Kauf im Internet getätigt wurde.

(zur Kontrolle: $p=0,2$)

3 **c)** Berechnen Sie für den Fall, dass der Kauf von einer Person getätigt wurde, die jünger als 60 Jahre ist, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Kauf im Verkaufsbüro getätigt wurde.

20

Stochastik

Aufgabengruppe 2

BE

Unter den Touristen eines Naturparks nutzen erfahrungsgemäß 15 % das Fahrrad für Ausflüge vor Ort. Im Folgenden werden diese Touristen als Radausflügler bezeichnet. Es soll davon ausgegangen werden, dass in einer zufälligen Auswahl von Touristen des Naturparks die Anzahl der Radausflügler binomialverteilt ist.

1 Für eine Stichprobe werden 50 Touristen des Naturparks zufällig ausgewählt.

1 **a)** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich in der Stichprobe genau fünf Radausflügler befinden.

3 **b)** Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der Radausflügler in der Stichprobe um mindestens 10 % größer ist als der Erwartungswert für diese Anzahl.

2 Um den Naturpark als Reiseziel attraktiver zu machen, setzt der dortige Tourismusverband Shuttlebusse ein. Die Fahrkarten für diese Busse können ausschließlich online gebucht werden und sind jeweils für einen bestimmten Tag gültig. Erfahrungsgemäß werden 80 % aller gebuchten Fahrkarten spätestens am Vortag der Fahrt gebucht. Von diesen spätestens am Vortag gebuchten Fahrkarten werden 90 % auch tatsächlich genutzt. Bei den restlichen, erst am Tag der Fahrt gebuchten Fahrkarten liegt dieser Anteil mit 95 % etwas höher.

3 **a)** Stellen Sie den Sachverhalt in einem beschrifteten Baumdiagramm dar.

3 **b)** Betrachtet wird eine zufällig ausgewählte, nicht genutzte Fahrkarte. Beurteilen Sie die folgende Aussage:

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Fahrkarte spätestens am Vortag gebucht wurde, ist achtmal so groß wie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie erst am Tag der Fahrt gebucht wurde.

(Fortsetzung nächste Seite)

Der Tourismusverband vermutet, dass sich der bisherige Anteil der Radausflügler unter den Touristen von 15 % durch den Einsatz der Shuttlebusse erhöht hat. Die Verantwortlichen planen die Durchführung eines Signifikanztests mit einem Signifikanzniveau von 8 % und der Nullhypothese „Der Anteil der Radausflügler unter allen Touristen liegt bei höchstens 15 %.“. Vor der Durchführung des Tests wird festgelegt, die Shuttlebusse nur dann weiterzubetreiben, wenn die Nullhypothese aufgrund des Testergebnisses abgelehnt wird.

5 **c)** Es ist geplant, den Test auf der Grundlage einer Stichprobe von 200 Touristen durchzuführen. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

5 **d)** Angenommen, der beschriebene Test wird auf der Grundlage einer Stichprobe von nur 100 Touristen durchgeführt. In diesem Fall wird die Nullhypothese abgelehnt, wenn sich unter diesen mehr als 20 Radausflügler befinden. Damit die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art höchstens 30 % beträgt, muss der tatsächliche Anteil der Radausflügler unter allen Touristen mindestens einen bestimmten Wert haben. Ermitteln Sie diesen Wert auf ganze Prozent genau und beschreiben Sie die Bedeutung des Fehlers zweiter Art im Sachzusammenhang.

Hinweis: Die unten abgebildete Tabelle ergänzt das zugelassene Tafelwerk.

20

Binomialverteilung kumulativ; $k \mapsto \sum_{i=0}^{k} B(n;p;i)$

n	k	p = 0,22	p = 0,23	p = 0,24	p = 0,25	p = 0,26	p = 0,27	p = 0,28
100	...	...	...	...	...	...	...	...
	15	0,05379	0,03292	0,01944	0,01108	0,00611	0,00325	0,00168
	16	0,08876	0,05701	0,03531	0,02111	0,01219	0,00680	0,00367
	17	0,13750	0,09257	0,06008	0,03763	0,02275	0,01329	0,00750
	18	0,20089	0,14155	0,09616	0,06301	0,03985	0,02434	0,01437
	19	0,27805	0,20468	0,14532	0,09953	0,06579	0,04199	0,02589
	20	0,36619	0,28106	0,20819	0,14883	0,10270	0,06843	0,04404
	21	0,46089	0,36797	0,28382	0,21144	0,15211	0,10569	0,07093
	22	0,55681	0,46119	0,36959	0,28637	0,21444	0,15516	0,10849
	23	0,64856	0,55562	0,46145	0,37108	0,28871	0,21723	0,15801
	24	0,73158	0,64612	0,55451	0,46167	0,37244	0,29087	0,21980
	25	0,80277	0,72830	0,64385	0,55347	0,46186	0,37368	0,29286
	...	...	...	...	...	...	...	...

Geometrie

Aufgabengruppe 1

BE

Gegeben sind die Punkte $A(30\,|\,{-5}\,|\,{-12})$, $B(30\,|\,13\,|\,0)$, $C(-30\,|\,13\,|\,0)$ und $D(-30\,|\,{-5}\,|\,{-12})$, die in der Ebene E liegen.

3 **a)** Begründen Sie, dass das Viereck ABCD ein Rechteck ist.

4 **b)** Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform und geben Sie die besondere Lage von E im Koordinatensystem an.

(zur Kontrolle: $E: 2x_2 - 3x_3 - 26 = 0$)

3 **c)** Bestimmen Sie die Größe φ des Winkels, den E mit der x_1x_2-Ebene einschließt.

(zur Kontrolle: $\varphi \approx 33{,}7°$)

Im Folgenden wird ein Sperrwerk an einem Fluss betrachtet, das dem Schutz vor Überflutungen bei Sturmfluten dient. Ein Teil dieses Sperrwerks besteht aus zwei kreisförmigen Metallscheiben, an denen ein Sperrtor befestigt ist. Durch Drehung der Metallscheiben wird das Sperrtor in verschiedene Stellungen gebracht.

In einem Koordinatensystem werden die beiden Metallscheiben durch die Grund- und Deckfläche eines geraden Zylinders dargestellt. Die x_1-Achse verläuft durch die Mittelpunkte dieser beiden Kreisflächen und entspricht der Drehachse der Metallscheiben.

Die Ebene E schneidet den Zylinder im Rechteck ABCD und zerlegt diesen in zwei Teilkörper. Der kleinere Teilkörper entspricht dem Sperrtor in einer speziellen Stellung (vgl. Abbildung 1). Eine Längeneinheit entspricht einem Meter in der Realität.

Es wird vereinfachend ausschließlich ein Wasserstand betrachtet, bei dem die Wasseroberfläche im Modell in der x_1x_2-Ebene liegt.

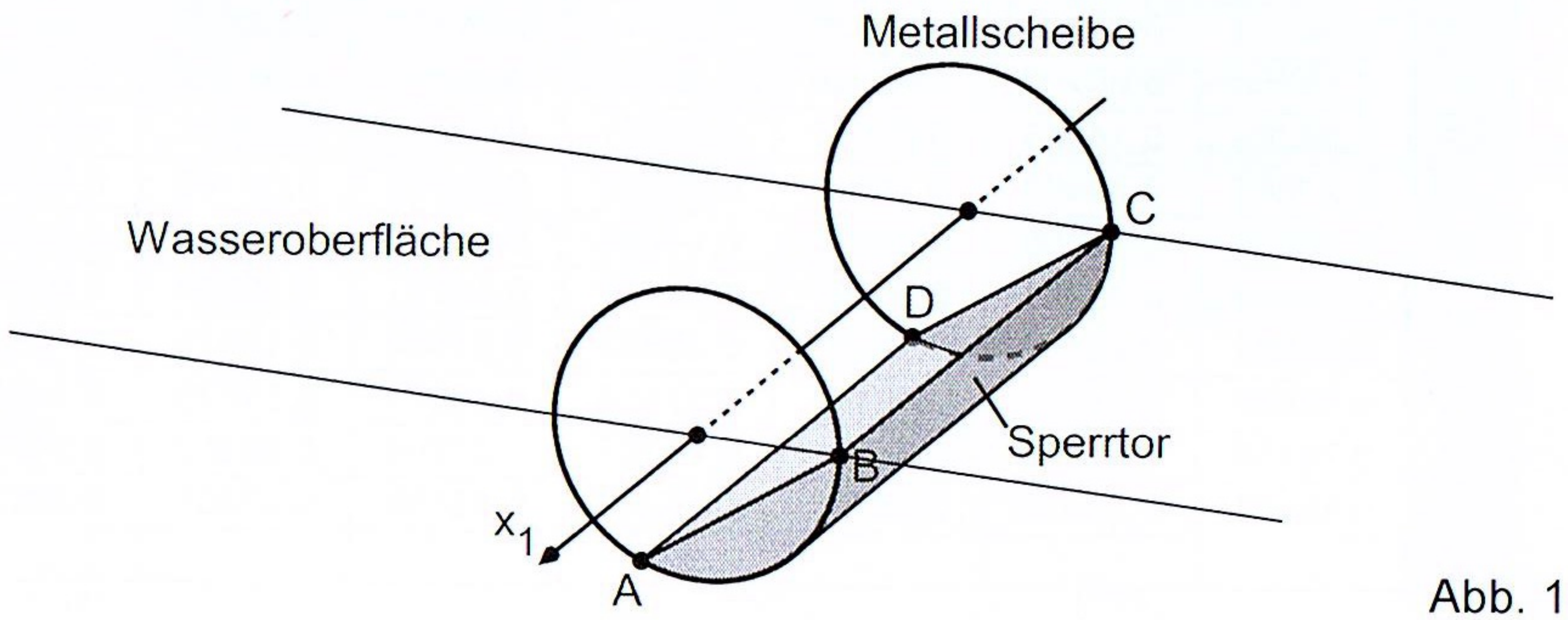


Abb. 1

(Fortsetzung nächste Seite)

2 **d)** Geben Sie den Durchmesser einer Metallscheibe und den Abstand der beiden Metallscheiben jeweils in Metern an.

Ist das Sperrtor geöffnet, so liegt dessen rechteckige Seitenfläche unterhalb der Wasseroberfläche und ist parallel zu ihr (vgl. Abbildung 2a). Ist das Sperrtor geschlossen, so steht die Seitenfläche senkrecht zur Wasseroberfläche (vgl. Abbildung 2b).

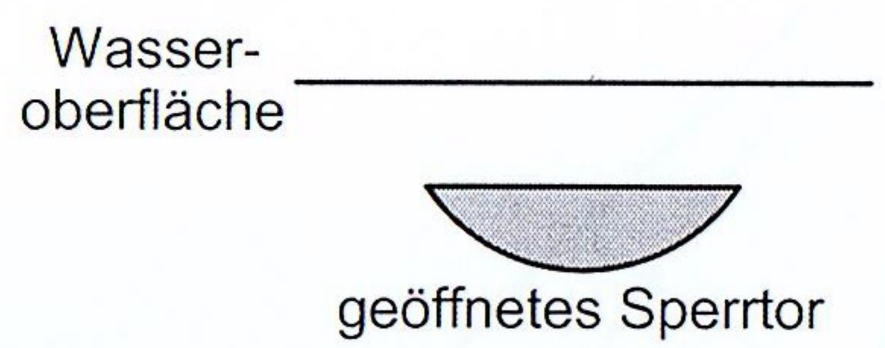


Abb. 2a

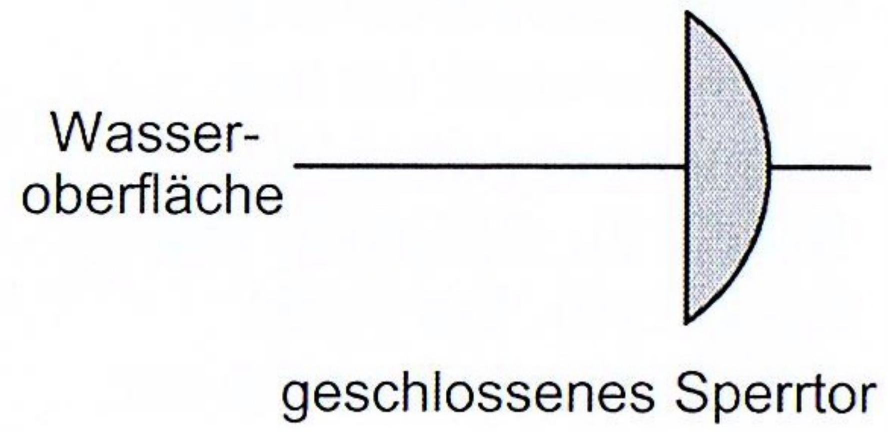


Abb. 2b

Bei einem Schließvorgang wird das geöffnete Sperrtor durch eine Vierteldrehung der Metallscheiben mit konstanter Geschwindigkeit innerhalb von 15 Minuten geschlossen.

3 **e)** Zu einem bestimmten Zeitpunkt während des Schließvorgangs befinden sich erstmals Teile des Sperrtors an der Wasseroberfläche. Bestimmen Sie mithilfe des Ergebnisses von Aufgabe c die Zeit, die ab diesem Zeitpunkt bis zum Ende des Schließvorgangs vergeht.

5 **f)** Die tiefste Stelle eines Schiffs bewegt sich im Modell auf der Gerade $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -17 \\ -8 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Beurteilen Sie anhand einer Rechnung, ob das Schiff das Sperrwerk passieren kann, wenn das Sperrtor geöffnet ist.

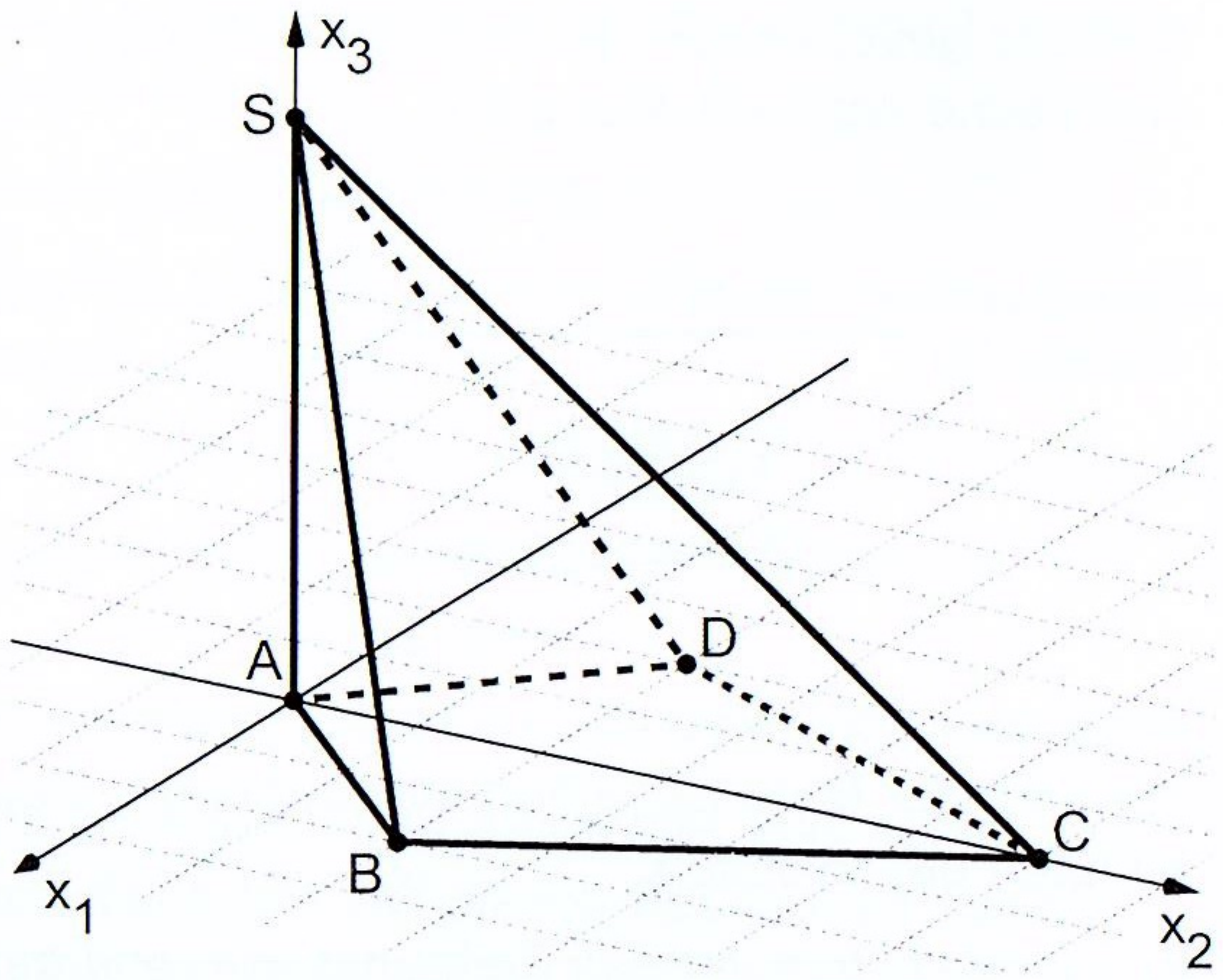
20

Geometrie

Aufgabengruppe 2

BE

Die Abbildung zeigt die Pyramide ABCDS. Ihre Grundfläche ABCD ist ein Drachenviereck mit den Eckpunkten $A(0|0|0)$, $B(2|2|0)$, $C(0|6|0)$ und $D(-2|2|0)$. Der Punkt $S(0|0|6)$ ist die Spitze der Pyramide.



4 **a)** Berechnen Sie die kleinste Kantenlänge sowie das Volumen der Pyramide ABCDS.

Die Seitenfläche BCS der Pyramide liegt in der Ebene E.

3 **b)** Betrachtet werden die Vektoren $\vec{n}$, deren Koordinaten nicht alle gleich null sind. Begründen Sie, dass folgende Aussage richtig ist:

Gilt für einen solchen Vektor $\vec{n} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ *und* $\vec{n} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$, *so ist er ein Normalenvektor von E.*

3 **c)** Die Ebene E hat die Gleichung $2x_1 + x_2 + x_3 = 6$. Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den E mit der x_1x_2-Ebene einschließt.

Gegeben ist die Schar der Ebenen $F_k: k \cdot x_2 + (k-2) \cdot x_3 = 2k$ mit $k \in]0;3[$. Jede Ebene F_k der Schar schneidet die Pyramide ABCDS in einem Dreieck BDQ_k, wobei der Punkt Q_k auf der Strecke $[SC]$ liegt.

4 **d)** Geben Sie eine Gleichung der Ebene F_2 an und zeichnen Sie in die Abbildung die Schnittfigur von F_2 mit der Pyramide ABCDS ein.

6 **e)** Es gibt einen Wert von k, für den der Flächeninhalt des Dreiecks BDQ_k minimal ist. Ermitteln Sie diesen Wert.

20

Richter

Mathematik

Abiturprüfung 2025

Prüfungsteile A und B

Bewertungsschlüssel und Erwartungshorizont
(nicht für den Prüfling bestimmt)

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Aufgabe nach der jeweils am linken Rand der Aufgabenstellung vermerkten, maximal erreichbaren Anzahl von Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

Für jede Teilaufgabe sind die allgemeinen mathematischen Kompetenzen und die Anforderungsbereiche ausgewiesen, die für die Bearbeitung eine wesentliche Rolle spielen.

Die von einem Prüfling in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten werden gemäß folgender Tabelle in Notenpunkte umgesetzt:

Intervall	Anzahl der mindestens zu erreichenden Bewertungseinheiten	Notenpunkte	Notenstufe
15 %	95	15	+ 1
	90	14	1
	85	13	1 –
15 %	80	12	+ 2
	75	11	2
	70	10	2 –
15 %	65	9	+ 3
	60	8	3
	55	7	3 –
15 %	50	6	+ 4
	45	5	4
	40	4	4 –
20 %	33	3	+ 5
	27	2	5
	20	1	5 –
20 %	0	0	6

Analysis

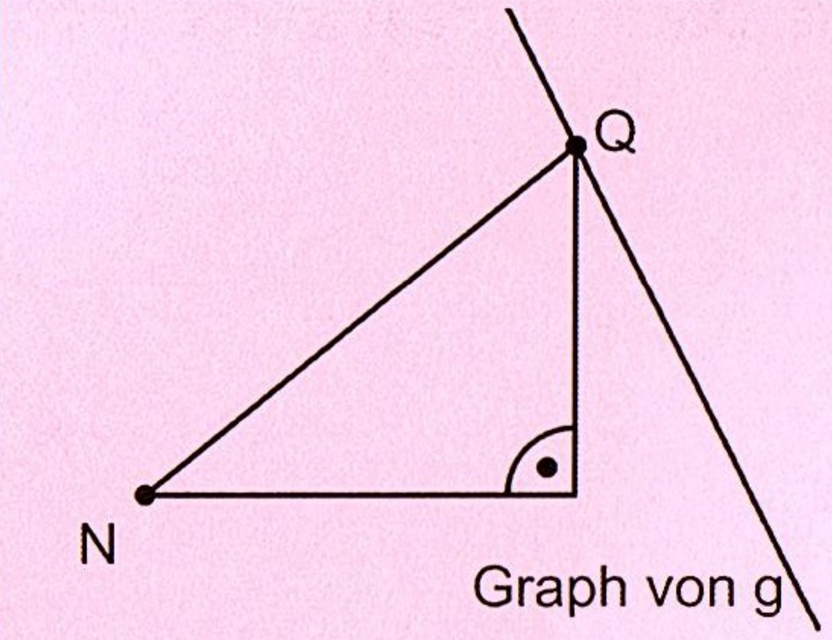
Aufgabengruppe 1

Prüfungsteil A

	BE	
1 a	2	$x=0;\ y=1$
b	3	$\int_1^2 f(x)\,dx = \left[-\frac{1}{x}+x\right]_1^2 = -\frac{1}{2}+2+1-1=\frac{3}{2}$
2	5	$g'(x)=2x-e^x;\ g''(x)=2-e^x$ $g''(x)=0 \Leftrightarrow x=\ln 2$ $g(\ln 2)=\underbrace{(\ln 2)^2}_{<1}-2<0$; somit liegt W unterhalb der x-Achse.
3 a	1	$\int_0^{\pi} f(x)\,dx=0$
b	4	$3a\cdot\cos(0)+b\cdot 0=-3 \Leftrightarrow a=-1$ $3\cdot(-1)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+b\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{4}\pi \Leftrightarrow b=\frac{3}{2}$
4	5	Der Wert des Integrals $\int_0^{x_S}(g(x)-f(x))\,dx$ entspricht dem Inhalt der von G_f und G_g eingeschlossenen Fläche. Der Wert des Integrals $\int_0^{x_S}(x-f(x))\,dx$ entspricht dem Inhalt der von der Gerade mit der Gleichung $y=x$ und G_f eingeschlossenen Fläche. Da G_g durch Spiegelung von G_f an der Gerade mit der Gleichung $y=x$ hervorgeht, hat die von G_f und G_g eingeschlossene Fläche einen doppelt so großen Flächeninhalt wie die von der Gerade und G_f eingeschlossene Fläche. Damit ist die Aussage wahr.
	20	

Teil-aufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen					
		K1	K2	K3	K4	K5	K6
1 a	2				I	I	
b	3					II	
2	5	II				I	
3 a	1	I			II		
b	4	I	I			II	
4	5	III	III		II		III

Prüfungsteil B

	BE	
1 a	2	$\left(0 \mid 1{,}5\sqrt{6}\right)$ Der Federball befindet sich beim Überqueren des Netzes in einer Höhe von etwa 3,67 m über dem Boden.
b	4	Wegen $f(6)=0$ und $\frac{13{,}40\,\text{m}}{2}=6{,}70\,\text{m}$ trifft der Federball innerhalb der Hälfte B auf dem Boden auf. $f(3)\approx 3{,}90$; gesuchte Höhe: etwa 3,90 m
c	6	$f'(x)=0{,}25\cdot\left(1\cdot\sqrt{6-x}+(x+6)\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{6-x}}\cdot(-1)\right)=\frac{2\cdot(6-x)-(x+6)}{8\cdot\sqrt{6-x}}$ $=\frac{6-3x}{8\cdot\sqrt{6-x}}$ $\lim\limits_{x\to 6} f'(x)=\lim\limits_{x\to 6}\frac{\overbrace{6-3x}^{\to -12}}{\underbrace{8\cdot\sqrt{6-x}}_{\substack{\to 0\\ >0}}}=-\infty$ Der Federball trifft senkrecht auf dem Boden auf.
d	2	$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$; $f(2)=4$ gesuchte Höhe: 4 m
2 a	5	 $d(x)=\sqrt{x^2+(-2x+2-1{,}55)^2}$ $=\sqrt{x^2+(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 0{,}45+0{,}45^2}$ $=\sqrt{5x^2-1{,}8x+0{,}2025}$

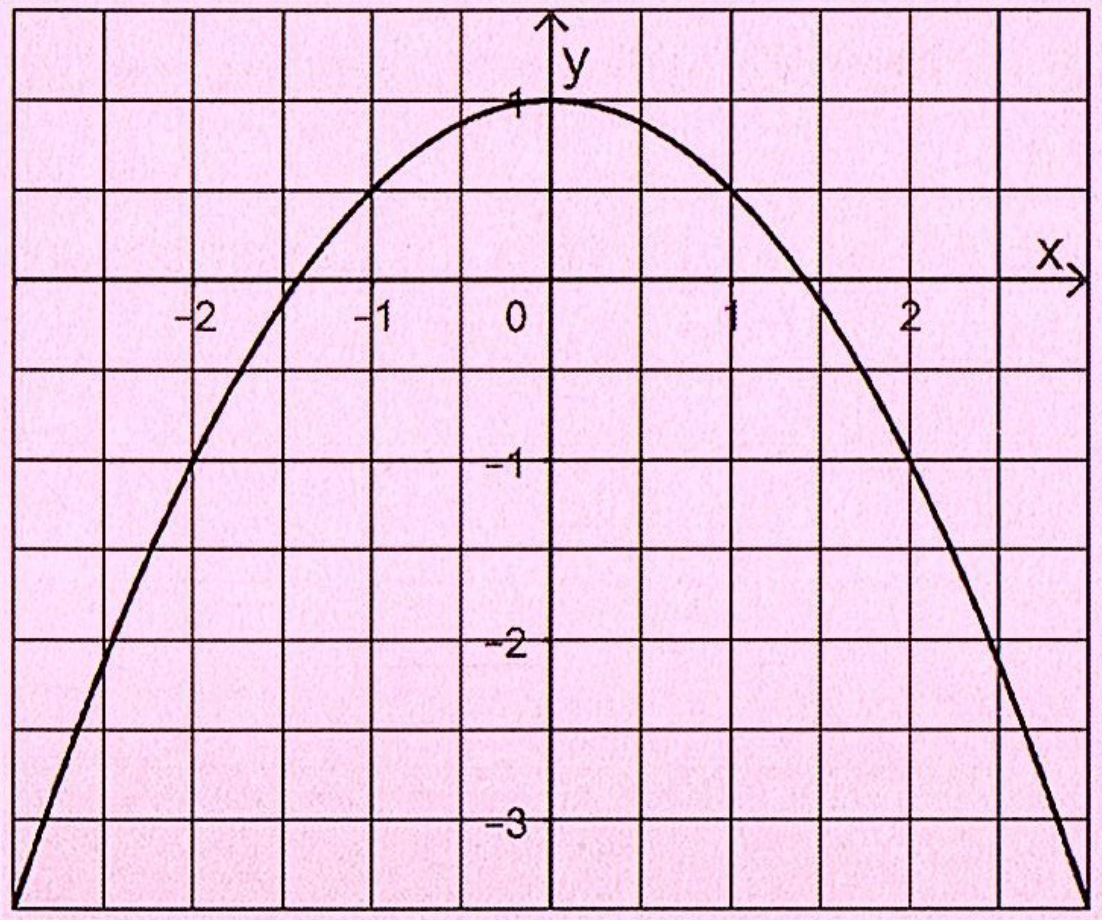
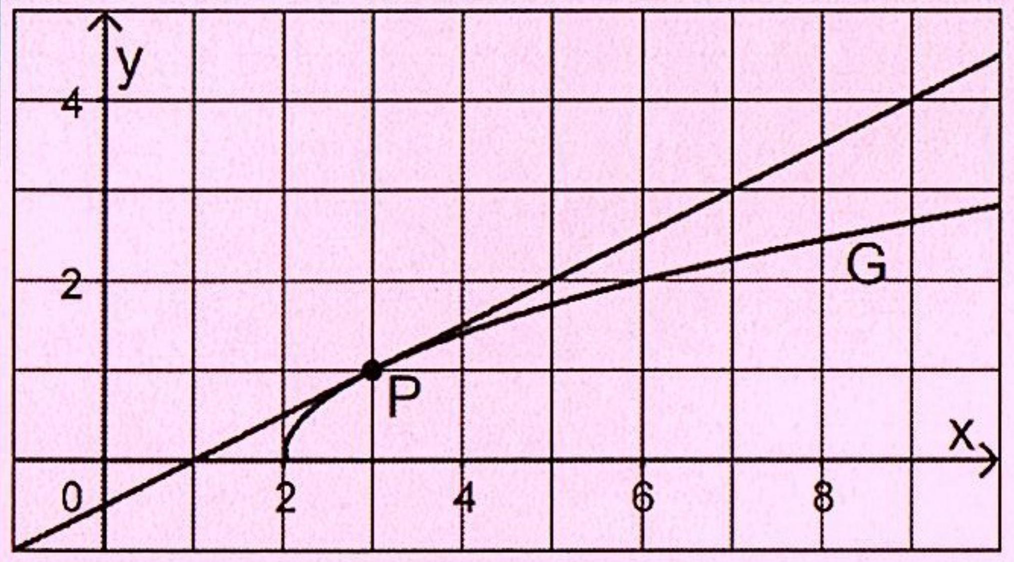
	BE	
b	3	$d'(x)=0 \Leftrightarrow 10x-1{,}8=0 \Leftrightarrow x=0{,}18$; $d(0{,}18)\approx 0{,}20$ gesuchter Abstand: etwa 20 cm
3 a	4	$h(x)=2\cdot\sqrt{5-x}-2$ $h(x)=0 \Leftrightarrow x=4$; $h'(x)=\frac{1}{\sqrt{5-x}}\cdot(-1)$; $h'(4)=-1$ Der Federball trifft im Abstand von 4m zur Netzebene unter einem Winkel von 45° auf.
b	4	Da der Graph von h nur an der Stelle $x=b$ senkrecht verläuft, ergibt sich $b=3$. $h(3)=0 \Leftrightarrow c=0$ $h(-1)=2{,}6 \Leftrightarrow a\cdot\sqrt{3-(-1)}=2{,}6 \Leftrightarrow a=1{,}3$
	30	

Teil-aufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen					
		K1	K2	K3	K4	K5	K6
1 a	2			I		I	I
b	4	I		I		I	I
c	6			II		II	I
d	2			I		I	
2 a	5	III	III		II	III	
b	3		II	II		II	
3 a	4			II		II	
b	4	III	III			II	

Analysis

Aufgabengruppe 2

Prüfungsteil A

	BE	
1 a	2	
b	3	Für $a > 0$ gilt: $\left[-\frac{1}{6}x^3 + x\right]_0^a = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{6}a^3 + a = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{6}a^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow a = \sqrt{6}$
2 a	2	Man weist nach, dass 2 eine Nullstelle der zweiten Ableitungs-funktion von g ist und sich das Vorzeichen von $g''(x)$ an dieser Stelle ändert.
b	3	$(1\|2)$ Begründung: Der Graph von h geht aus dem Graphen von g durch Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ und Verschiebung um 1 in negative y-Richtung hervor.
3 a	2	$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3$; $f'(2) = 0$
b	3	Graph II Jede Stammfunktion von f hat die Wendestelle 2.
4 a	1	

	BE	
b	4	Eine Zahl m ist genau dann eine mögliche Steigung der Gerade mit der beschriebenen Eigenschaft, wenn $\frac{1}{2} < m \le 1$ oder $0 < m < \frac{1}{2}$ gilt.
	20	

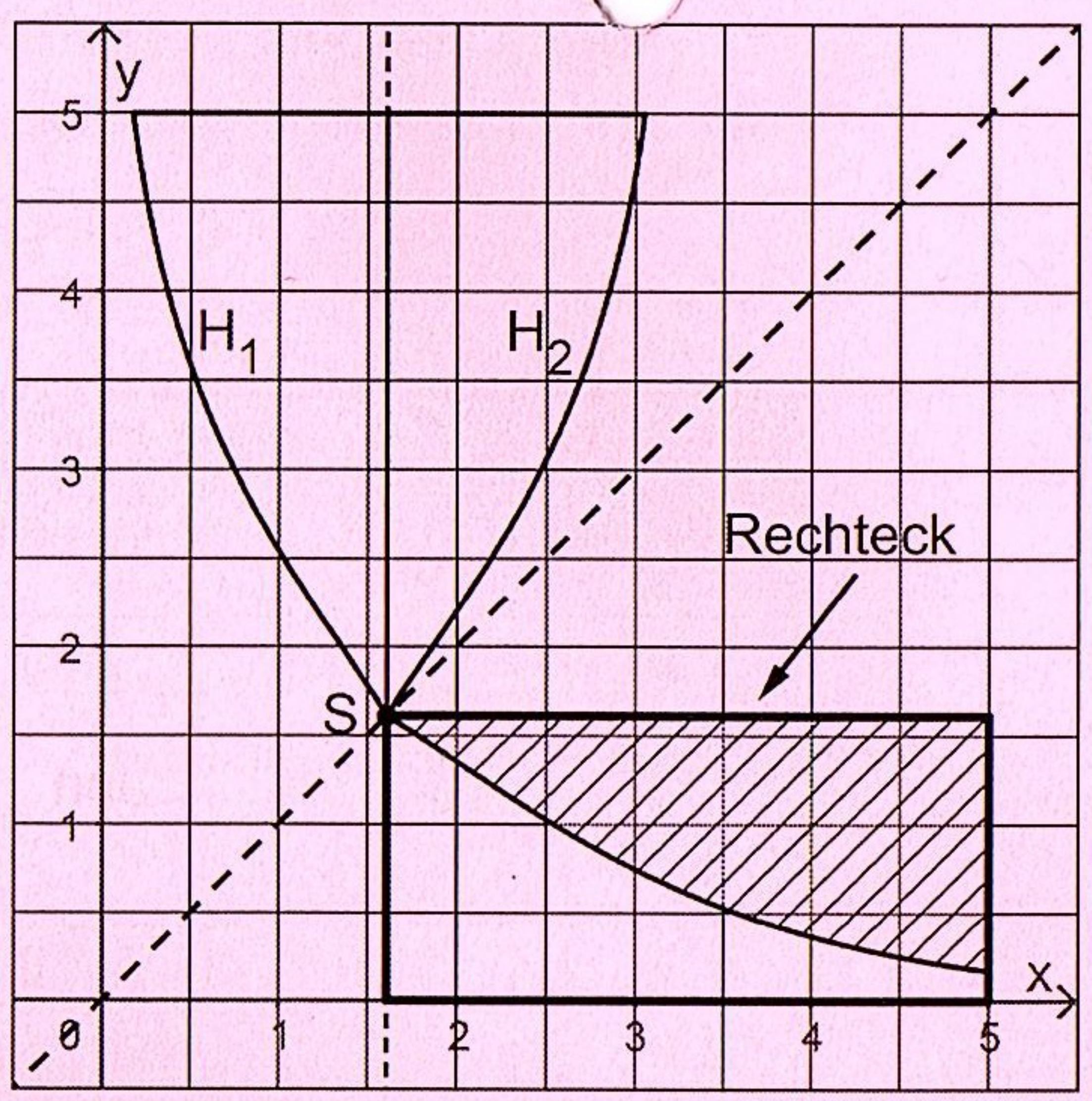
Teil-aufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen K1	K2	K3	K4	K5	K6
1 a	2				I		
b	3		II			II	
2 a	2						I
b	3	II	II		II		
3 a	2	I				I	
b	3	II	II		II		
4 a	1				I		
b	4	II	III		III		

Prüfungsteil B

	BE	
1 a	4	$f'(x) = 5e^{-x} + 5x \cdot e^{-x} \cdot (-1) = 5 \cdot (1-x) \cdot e^{-x}$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ $f(1) = \frac{5}{e}$; Extrempunkt: $\left(1 \| \frac{5}{e}\right)$
b	3	Gleichung der Gerade: $y = \frac{e^2}{5} \cdot x + n$ $\frac{5}{e} = \frac{e^2}{5} \cdot 1 + n \Leftrightarrow n = \frac{5}{e} - \frac{e^2}{5}$
c	6	Abbildung 1 ist zu entnehmen, dass es zwei x-Werte gibt, für die $f(x) = 1$ gilt. Daher ist f nicht umkehrbar. Die Funktion h ist umkehrbar, da f nur die Extremstelle 1 besitzt und somit im Intervall $[1;+\infty[$ streng monoton ist. Definitionsbereich der Umkehrfunktion von h: $\left]0;\frac{5}{e}\right]$ Wertebereich der Umkehrfunktion von h: $[1;+\infty[$

d | 5

Der Wert des Terms $(5-\ln 5)\cdot \ln 5$ kann als Flächeninhalt eines Rechtecks der Länge $5-\ln 5$ und der Breite $\ln 5$ gedeutet werden.
Der Wert des Terms $\int\limits_{\ln 5}^{5} f(x)\,dx$ entspricht dem Inhalt des Flächenstücks, das G und die Geraden mit den Gleichungen $x=\ln 5$ und $x=5$ mit der x-Achse einschließen.



Subtrahiert man vom Flächeninhalt des Rechtecks den Flächeninhalt des beschriebenen Flächenstücks, so erhält man den Inhalt der schraffierten Fläche. Dieser entspricht dem Flächeninhalt derjenigen Hälfte der Figur, die durch Spiegeln an der Gerade mit der Gleichung $y=x$ aus der schraffierten Fläche hervorgeht.

e | 3

$2\cdot\left((5-\ln 5)\cdot \ln 5-\left(F(5)-F(\ln 5)\right)\right)\approx 6{,}1$

2 a | 5

Graph III: $k=1$, Koordinaten des Tiefpunkts: $\left(1 \mid -\frac{5}{e}\right)$

I: $k=-0{,}5$; II: $k=-1$; IV: $k=0{,}5$

b | 4

$-g_{-k}(x)=-\left(-5x\cdot e^{-(-k)\cdot x}\right)=-5\cdot(-x)\cdot e^{-k\cdot(-x)}=g_k(-x)$

Die Graphen der Funktionen g_k und g_{-k} sind zueinander symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs.

| 30 |

Teilaufgabe	BE	K1	K2	K3	K4	K5	K6
		allgemeine mathematische Kompetenzen					
1 a	4					I	
b	3		II			II	II
c	6	II	II		I		II
d	5	III			III		II
e	3					I	
2 a	5		II		I	I	II
b	4	III			III	III	

Stochastik

Aufgabengruppe 1

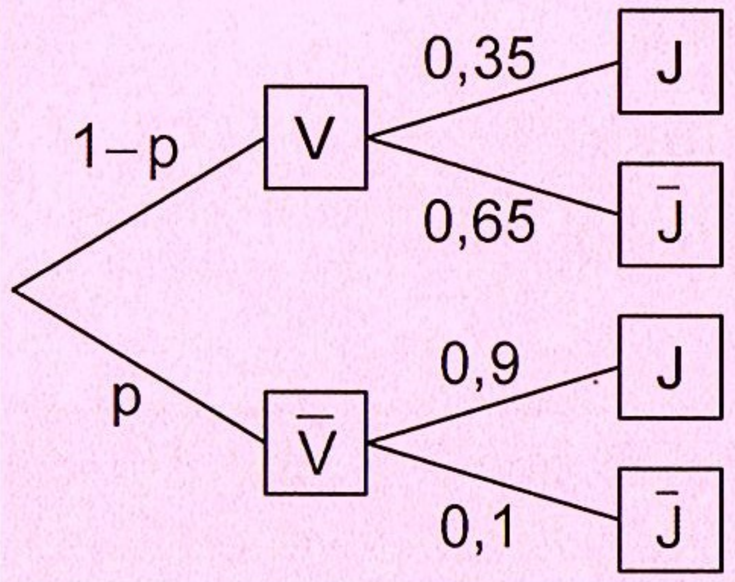
Prüfungsteil A

	BE	
a	2	Bis auf Vertauschung der Faktoren sind $2\cdot 5$ und $3\cdot 5$ die einzigen Möglichkeiten, 10 bzw. 15 als Produkt aus zwei erzielten Zahlen darzustellen. Somit sind die betrachteten Wahrscheinlichkeiten gleich groß.
b	3	Das Produkt ist genau dann gleich 2, 3 oder 5, wenn eine der n erzielten Zahlen 2, 3 bzw. 5 ist und sonst nur Einsen erzielt werden. Ein Term für die beschriebene Wahrscheinlichkeit ist also $3\cdot n\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$.
	5	

Teilaufgabe	BE	K1	K2	K3	K4	K5	K6
		allgemeine mathematische Kompetenzen					
a	2	II	I		I		I
b	3	III	III	II		II	III

Prüfungsteil B

	BE	
1 a	3	$P(A)=P_{0,65}^{200}(X=130)\approx 5{,}9\,\%$ $P(B)=P_{0,65}^{200}(X>140)=1-P_{0,65}^{200}(X\leq 140)\approx 5{,}8\,\%$
b	3	$P(E)\approx 20{,}6\,\%$ Aus einer Urne mit 200 Kugeln, von denen 40 schwarz sind, werden fünf Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. E: „Genau zwei Kugeln sind schwarz."
c	3	$1-\left(\frac{\binom{40}{0}\cdot\binom{160}{5}}{\binom{200}{5}}+\frac{\binom{40}{1}\cdot\binom{160}{4}}{\binom{200}{5}}\right)\approx 26{,}2\,\%$
d	2	Nur die Gewinner des ersten und dritten Buchs sind Abonnenten.
2 a	1	Der Kauf wurde von einer Person, die mindestens 60 Jahre alt ist, im Internet getätigt.

	BE	
b	5	 $p\cdot 0{,}1+(1-p)\cdot 0{,}65=0{,}54$ $\Leftrightarrow -0{,}55p=-0{,}11 \Leftrightarrow p=0{,}2$
c	3	$P_J(V)=\frac{(1-0{,}2)\cdot 0{,}35}{1-0{,}54}\approx 60{,}9\,\%$
	20	

Teil-aufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen					
		K1	K2	K3	K4	K5	K6
1 a	3			I		I	
b	3			II		I	I
c	3		II	II		I	
d	2			II			I
2 a	1					I	I
b	5		III		II	II	II
c	3		II	II		I	

Stochastik

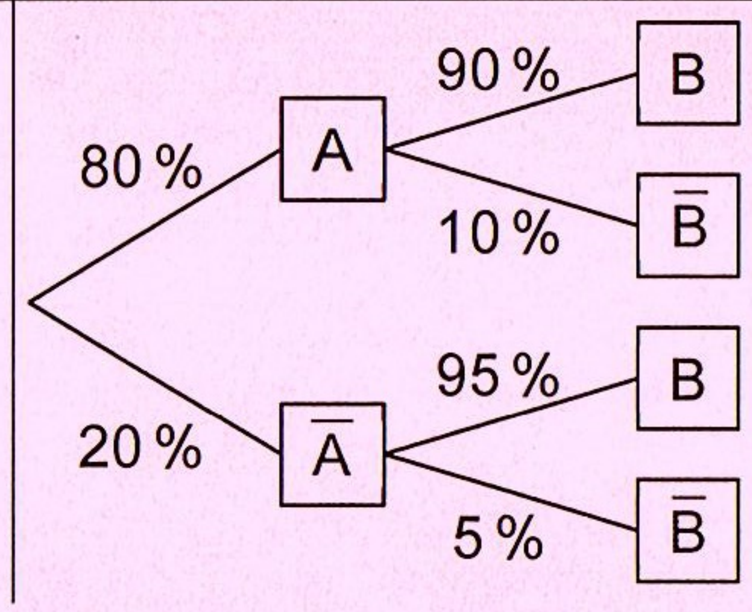
Aufgabengruppe 2

Prüfungsteil A

	BE	
a	2	Bis auf Vertauschung der Faktoren sind $2\cdot 5$ und $3\cdot 5$ die einzigen Möglichkeiten, 10 bzw. 15 als Produkt aus zwei erzielten Zahlen darzustellen. Somit sind die betrachteten Wahrscheinlichkeiten gleich groß.
b	3	Das Produkt ist genau dann gleich 2, 3 oder 5, wenn eine der n erzielten Zahlen 2, 3 bzw. 5 ist und sonst nur Einsen erzielt werden. Ein Term für die beschriebene Wahrscheinlichkeit ist also $3\cdot n\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$.
	5	

Teil-aufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen					
		K1	K2	K3	K4	K5	K6
a	2	II	I		I		I
b	3	III	III	II		II	III

Prüfungsteil B

	BE	
1 a	1	X: Anzahl der Radausflügler $P_{0{,}15}^{50}(X=5)\approx 11\,\%$
b	3	$\mu=50\cdot 0{,}15=7{,}5$ $P_{0{,}15}^{50}(X\geq 9)\approx 33\,\%$
2 a	3	 A: „Die Fahrkarte wird spätestens am Vortag gebucht.“ B: „Die Fahrkarte wird genutzt.“

b	3	$P_{\overline{B}}(A) = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}1}{P(\overline{B})} = \frac{0{,}08}{P(\overline{B})}$ $P_{\overline{B}}(\overline{A}) = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}05}{P(\overline{B})} = \frac{0{,}01}{P(\overline{B})}$ Die Aussage ist richtig.
c	5	Y: Anzahl der Radausflügler $P_{0,15}^{200}(Y \geq 37) \approx 10{,}1\,\%$, $P_{0,15}^{200}(Y \geq 38) \approx 7{,}2\,\%$ Befinden sich mindestens 38 Radausflügler in der Stichprobe, so wird die Nullhypothese abgelehnt.
d	5	$P_{0,22}^{100}(Y \leq 20) \approx 37\,\%$, $P_{0,23}^{100}(Y \leq 20) \approx 28\,\%$ Der tatsächliche Anteil der Radausflügler müsste mindestens 23 % betragen. Obwohl der Anteil der Radausflügler auf über 15 % gestiegen ist, entscheidet man sich aufgrund des Testergebnisses dafür, den Betrieb der Shuttlebusse einzustellen.
	20	

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen					
		K1	K2	K3	K4	K5	K6
1 a	1			I			I
b	3		II	II		I	
2 a	3		I		I		I
b	3	II	II	II		II	
c	5	II	II			II	II
d	5	II	III	III		II	II

Geometrie

Aufgabengruppe 1

Prüfungsteil A

	BE	
a	2	$\left\lvert \overrightarrow{AE} \right\rvert = \left\lvert \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rvert = \sqrt{9} = 3$
b	3	Für die Höhe h der Pyramide über der Grundfläche ABCD gilt: $\frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot h = 3 \Leftrightarrow h = 1$ Damit: $\overrightarrow{S} = \overrightarrow{A} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AE}$; $S\left(\frac{7}{3} \middle\vert \frac{5}{3} \middle\vert -\frac{1}{3}\right)$
	5	

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen					
		K1	K2	K3	K4	K5	K6
a	2					I	
b	3		II			II	

Prüfungsteil B

	BE	
a	3	$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \\ 12 \end{pmatrix} = \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \\ 12 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -60 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$
b	4	$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \\ 12 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -60 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -720 \\ 1080 \end{pmatrix} = -360 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ E hat also eine Gleichung der Form $2x_2 - 3x_3 + c = 0$. $A \in E \Leftrightarrow c = -26$ E verläuft parallel zur x_1-Achse.
c	3	$\cos\varphi = \left\lvert \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} \right\rvert = \frac{3}{\sqrt{13}}$ liefert $\varphi \approx 33{,}7°$.
d	2	Durchmesser: 26 m; Abstand: 60 m
e	3	$\frac{90° - \varphi}{90°} \cdot 15\text{ min} \approx 9\text{ min }23\text{ s}$

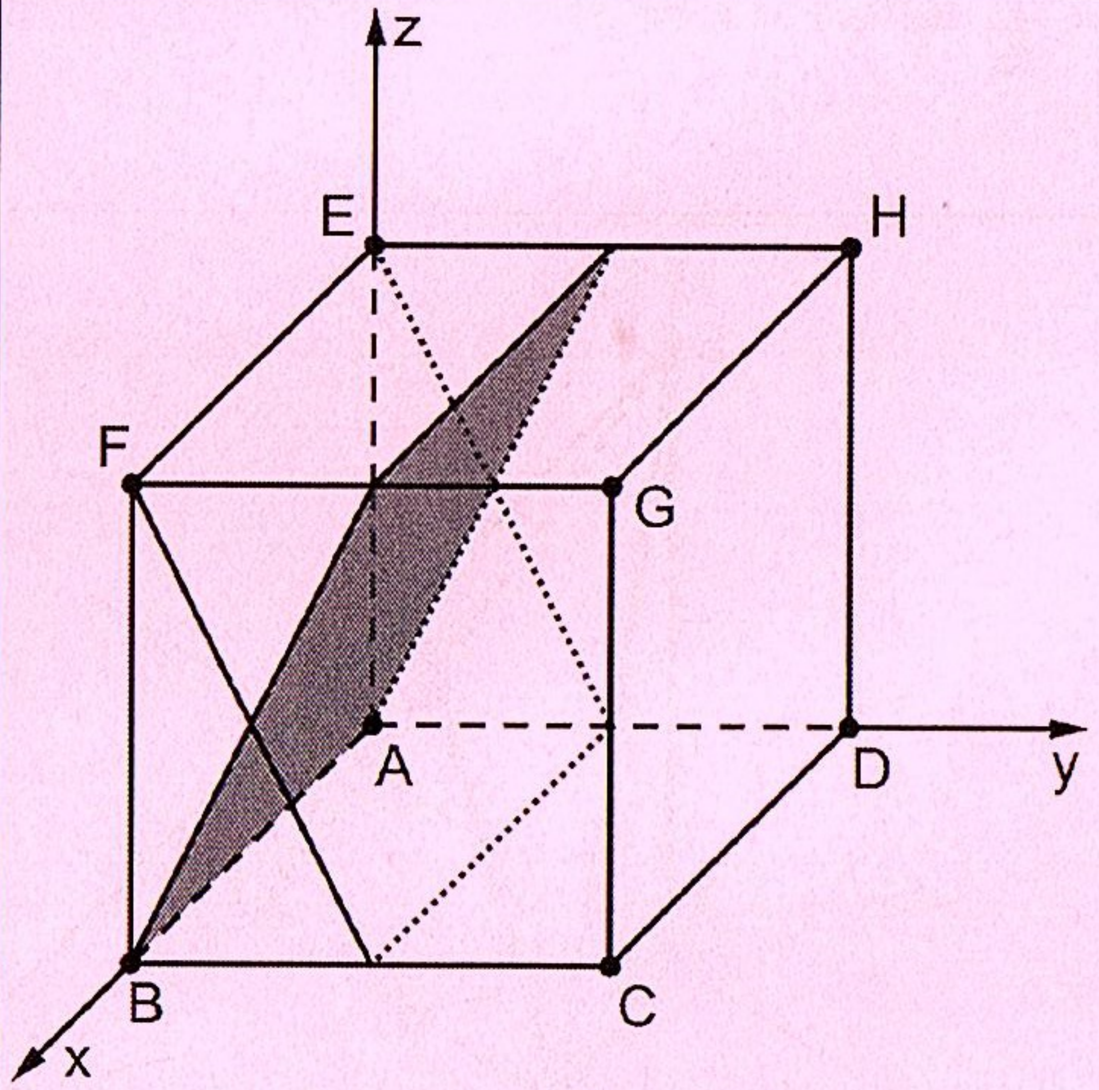
	BE	
f	5	Abstand des Koordinatenursprungs von E: $\frac{1}{\sqrt{13}} \cdot \lvert 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - 26 \rvert \approx 7{,}2$ Die rechteckige Seitenfläche des geöffneten Sperrtors befindet sich ca. 7,2 m unter der Wasseroberfläche. Da sich die tiefste Stelle des Schiffs 8 m unter der Wasseroberfläche befindet, kann das Schiff das Sperrwerk nicht passieren.
	20	

Teil-aufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen					
		K1	K2	K3	K4	K5	K6
a	3	I				I	
b	4					II	I
c	3					II	
d	2			I	I	I	
e	3			II	II	II	
f	5	II	III	II	II	II	

Geometrie

Aufgabengruppe 2

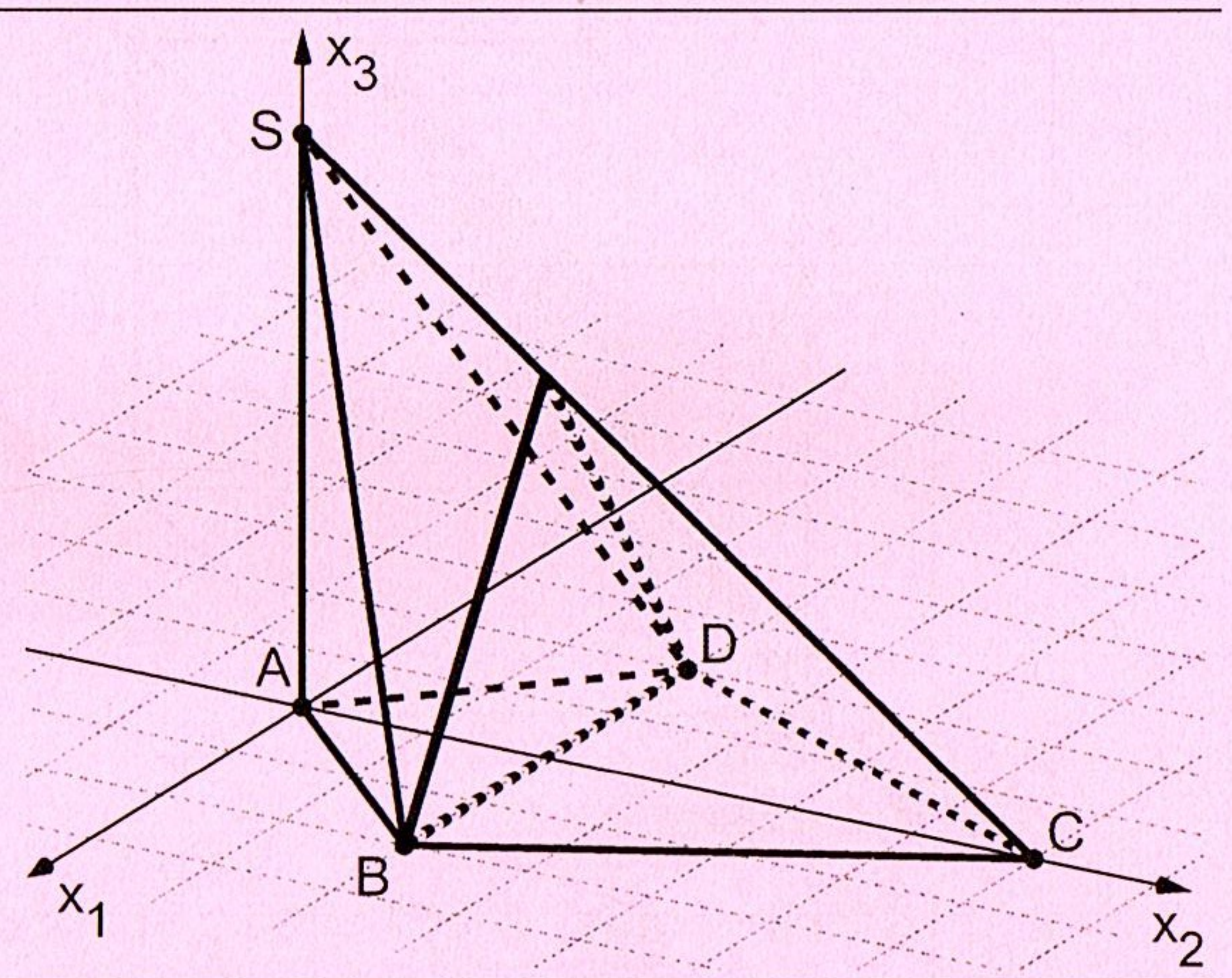
Prüfungsteil A

	BE	
a	2	Volumen: $\frac{1}{4} \cdot 4^3 = 16$
b	3	 Schnittgerade: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$
	5	

Teil-aufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen					
		K1	K2	K3	K4	K5	K6
a	2		I		I	I	
b	3		II		II		

Prüfungsteil B

	BE	
a	4	kleinste Kantenlänge: $\overline{AB} = \left\lvert \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rvert = 2\sqrt{2}$ Inhalt der Grundfläche der Pyramide: $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$ Volumen der Pyramide: $\frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 6 = 24$

b	3	$\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ ist kollinear zu $\overrightarrow{BC}$, $\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix}$ ist kollinear zu $\overrightarrow{BS}$. Da die Vektoren $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{BS}$ die Ebene E aufspannen und $\vec{n}$ zu diesen Vektoren senkrecht steht, ist $\vec{n}$ ein Normalenvektor von E.
c	3	$\cos\alpha = \dfrac{\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\left\lvert\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right\rvert\cdot\left\lvert\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rvert} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ liefert $\alpha \approx 65{,}9°$.
d	4	$F_2 : x_2 = 2$ 
e	6	Der Flächeninhalt des Dreiecks BDQ_k ist minimal, wenn $\overline{MQ_k}$ am kleinsten ist, wobei M den Mittelpunkt von $[BD]$ bezeichnet. Die zugehörige Ebene F_k steht in diesem Fall senkrecht zur Kante $[SC]$. Für diesen Wert von k gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\begin{pmatrix}0\\k\\k-2\end{pmatrix} = \lambda\cdot\begin{pmatrix}0\\6\\-6\end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix}0\\k\\k-2\end{pmatrix} = \lambda\cdot\begin{pmatrix}0\\6\\-6\end{pmatrix} \Rightarrow k = 6\lambda \wedge k-2 = -6\lambda \Rightarrow k-2 = -k \Rightarrow k = 1$
	20	

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen K1	K2	K3	K4	K5	K6
a	4		I		I	I	
b	3	II	II		I		II
c	3		I		I	II	
d	4	II			II	I	
e	6	III	III		II	II	III